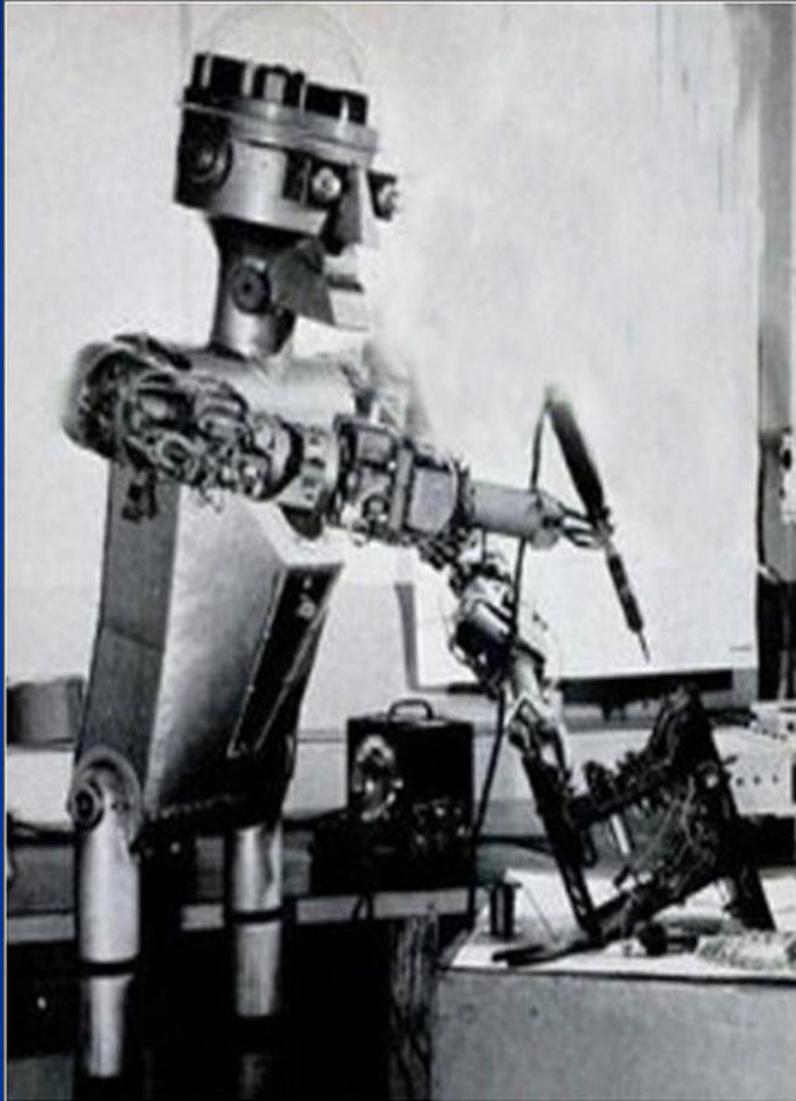


# 南昌理工学院

Nanchang Institute of Technology



## 工业机器人

机电工程学院

# 第三章 工业机器人运动学

## 3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

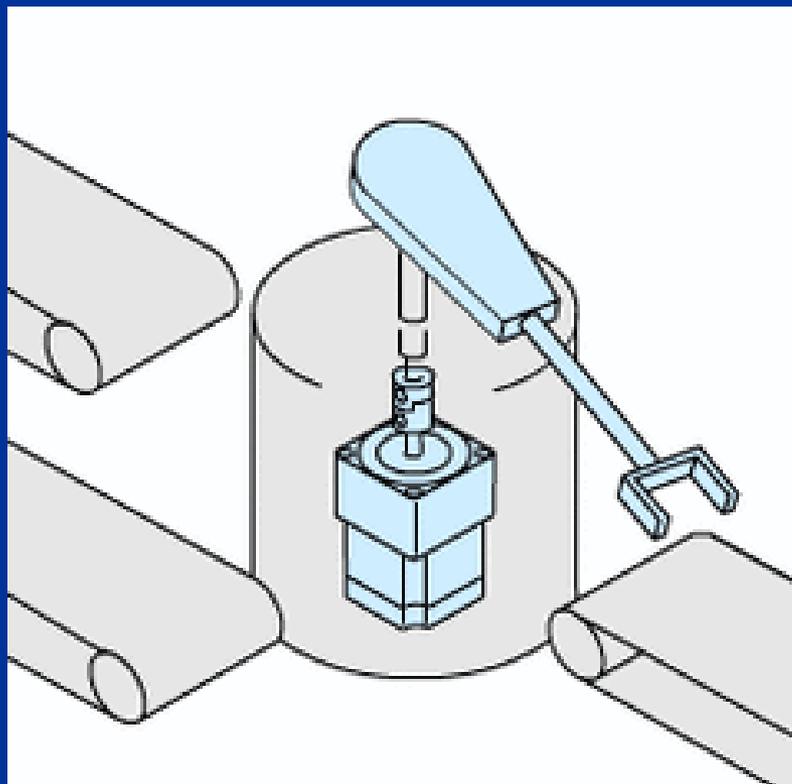
3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

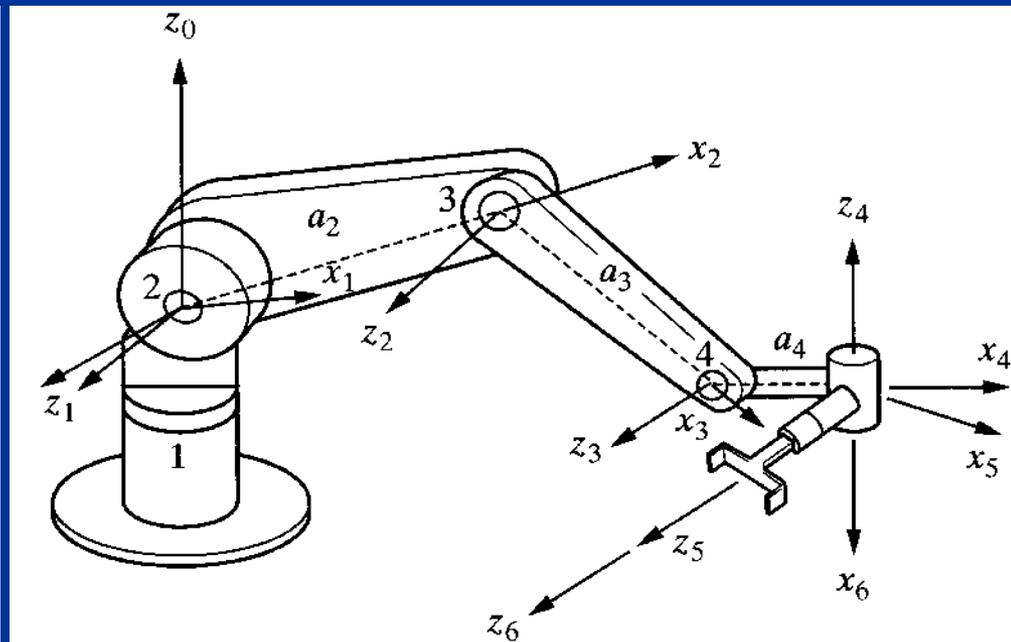
## 3.1 概述

- 要实现对机器人在空间运动轨迹的控制，完成预定的作业任务，就必须要知道机器人手部在空间瞬时的位置与姿态
- 如何计算机器人末端操作器在空间的位置和姿态是实现机器人的控制首先要解决的问题，也是研究机器人运动学的基本问题。



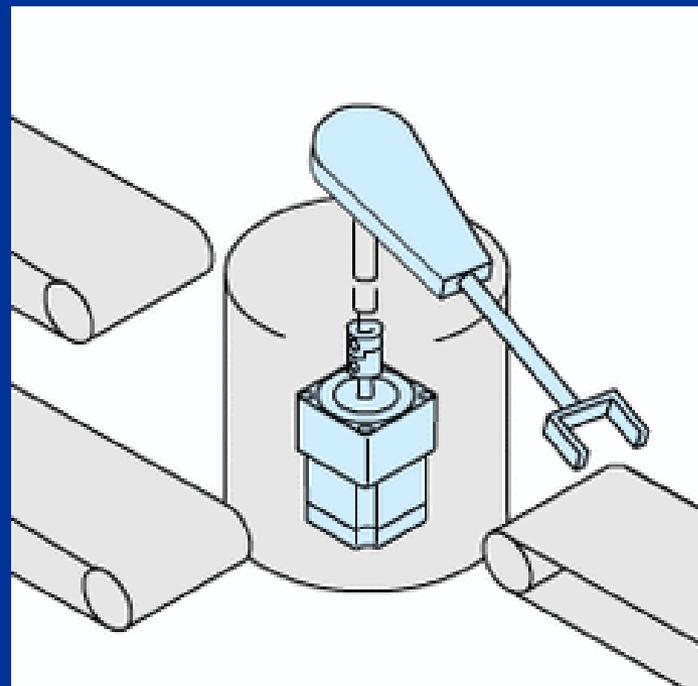
# 机器人运动学要研究的主要问题

- 研究机器人的机械系统的运动需要建立一套运动的表示方法
- 机器人实际上可以认为是由一系列关节连接起来的连杆所组成。我们把坐标系固联在机器人的每个关节上，用齐次变换来描述这些坐标系之间的相对位置和方向。



# 机器人运动学要研究的问题

- ◆ **正向运动学**---已知机器人杆件几何参数和关节角变量，求机器人末端操作器相对于参考坐标系的位置和姿态。
- ◆ **逆向运动学**---已知机器人杆件的几何参数，给定机器人末端操作器相对于参考坐标系的期望位置和姿态，**机器人末端操作器能否达到预期位姿？**如能达到，有几种不同形态？



# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

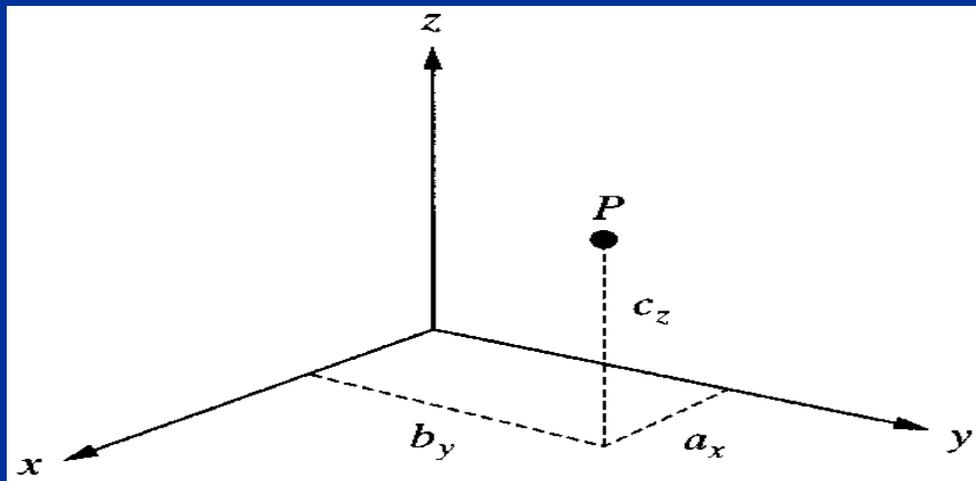
3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

# 1、点的位置描述

- 直角坐标系中，空间任一点P的位置可用矢量描述

$$P = a_x \hat{i} + b_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

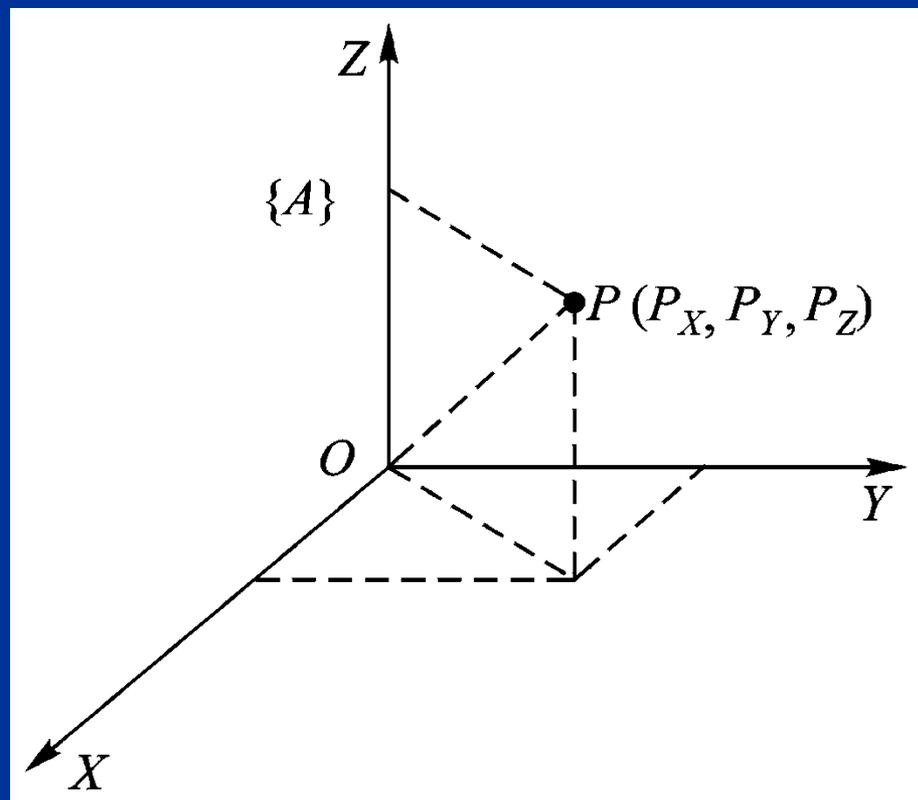


# 1、点的位置描述

- 在选定的直角坐标系  $\{A\}$  中，空间任一点  $P$  的位置也可用  $3 \times 1$  的位置矢量  ${}^A P$  表示，其左上角代表选定的坐标系

$${}^A P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

式中： $P_x$   $P_y$   $P_z$  是点  $P$  在坐标系  $\{A\}$  中的三个位置分量。如图所示。



## 2、物体位置姿态（位姿）描述

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

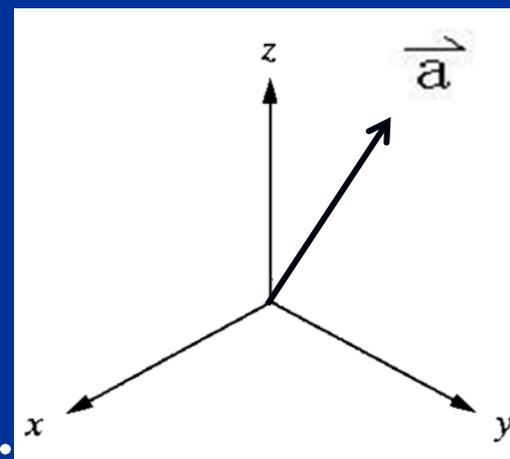
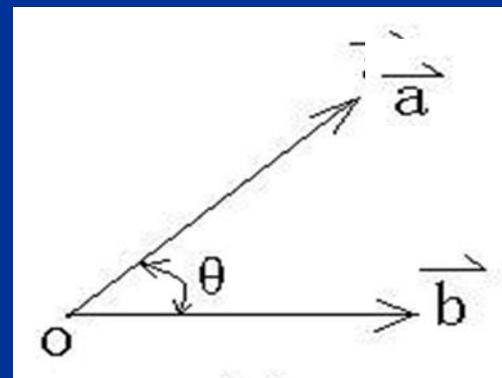
令 $\vec{b}=\vec{i}$ （ $\vec{i}$ 为 $\vec{b}$ 方向上的单位矢量），则

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos \theta$$

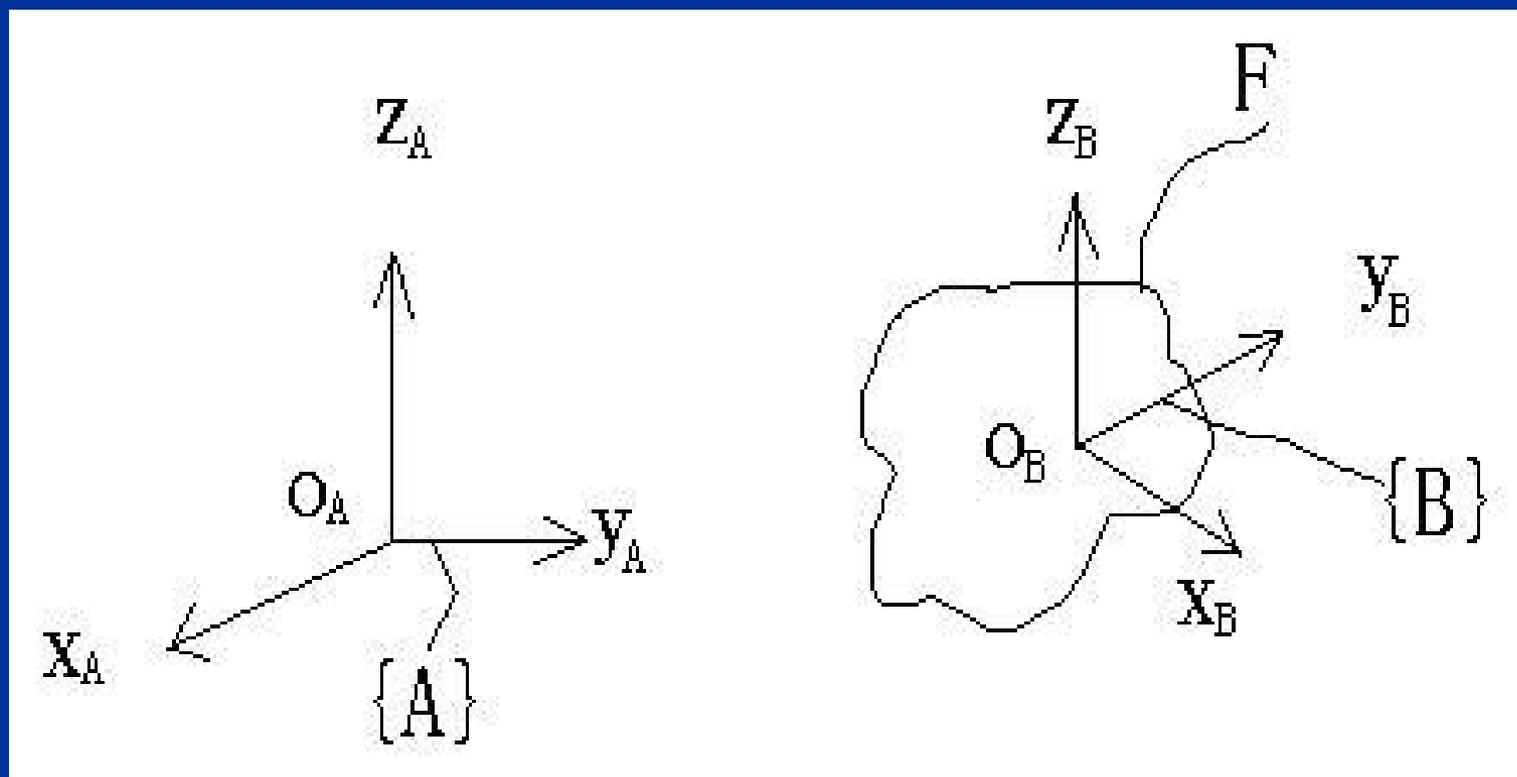
一个矢量在另一个矢量上的投影等于该矢量与另一矢量方向上单位矢量的点积。

则在三维坐标系中， $\vec{a}$ 向量的方向可表示为：

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$



## 2、物体位置姿态（位姿）描述



## a) 位置的描述

采用直角坐标描述点的位置，因此，刚体F的位置描述，即 $O_B$ 点在{A}中描述可用一个 $3 \times 1$ 的列矢量（位置矢量）表示，即

$${}^A \vec{P}_{BO} = [p_x, p_y, p_z]^T$$

其中 $p_x$ 、 $p_y$ 和 $p_z$ 是点 $O_B$ 在{A}系中的三个坐标分量。

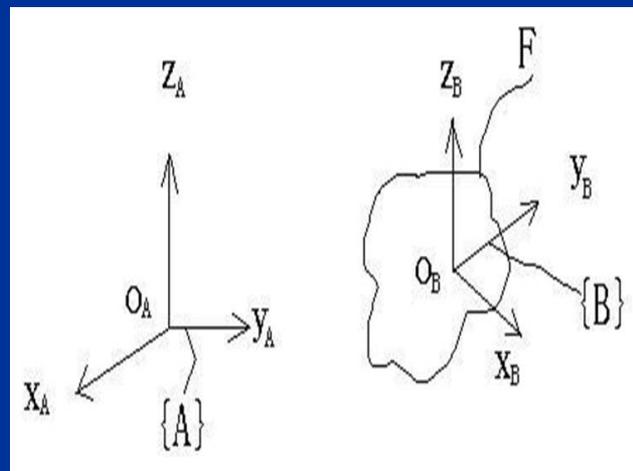
## b) 姿态（方位）的描述

采用旋转矩阵来表示刚体姿态（方位），即由{B}系的三个单位主矢量相对于坐标系{A}的方向余弦组成：

$${}^A_B R = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{x}_B & \mathbf{y}_B & \mathbf{z}_B \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{y}_A \\ \mathbf{z}_A \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos(x_B, x_A) & \cos(y_B, x_A) & \cos(z_B, x_A) \\ \cos(x_B, y_A) & \cos(y_B, y_A) & \cos(z_B, y_A) \\ \cos(x_B, z_A) & \cos(y_B, z_A) & \cos(z_B, z_A) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

其中： $\cos \theta = \cos(x_B, x_A)$

R既表示了刚体F在{A}系中的方位，也描述了{B}系在{A}系中的姿态，称为**姿态矩阵**。



# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

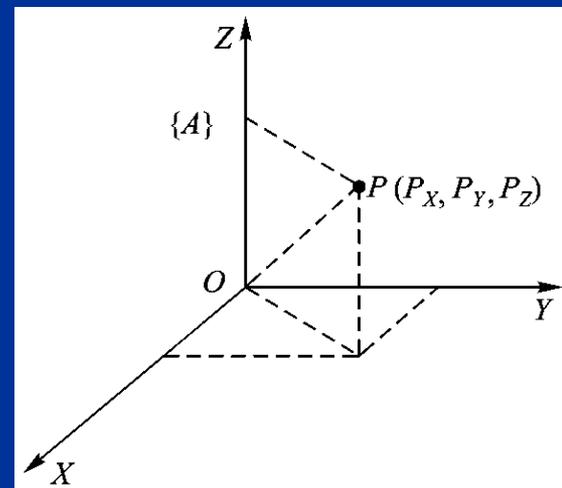
3.8 机器人逆运动学

# 1、齐次坐标表示空间位置

◆ 齐次坐标是将一个原本是 $n$ 维的量用一个 $n+1$ 维量来表示。

◆ 四个数组成的 $(4 \times 1)$ 列阵

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$



表示三维空间直角坐标系 $\{A\}$ 中点 $P$ ，则列阵

$[p_x \ p_y \ p_z \ 1]^T$ 称为三维空间点 $P$ 的齐次坐标。

说明：齐次坐标的表示不是唯一的。我们将其各元素同乘一非零因子 $w$ 后，仍然代表同一点 $P$

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ w \end{bmatrix}$$

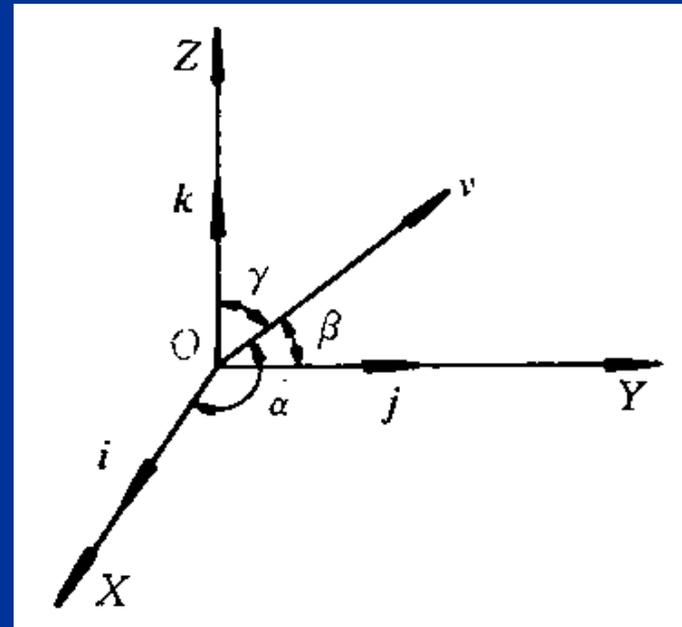
## 2、齐次坐标表示坐标轴方向

- 如图所示， $i$ ， $j$ ， $k$ 分别是直角坐标系中 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 坐标轴的单位向量。若用齐次坐标来描述 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 轴的方向，则

$$\mathbf{X} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{Y} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{Z} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

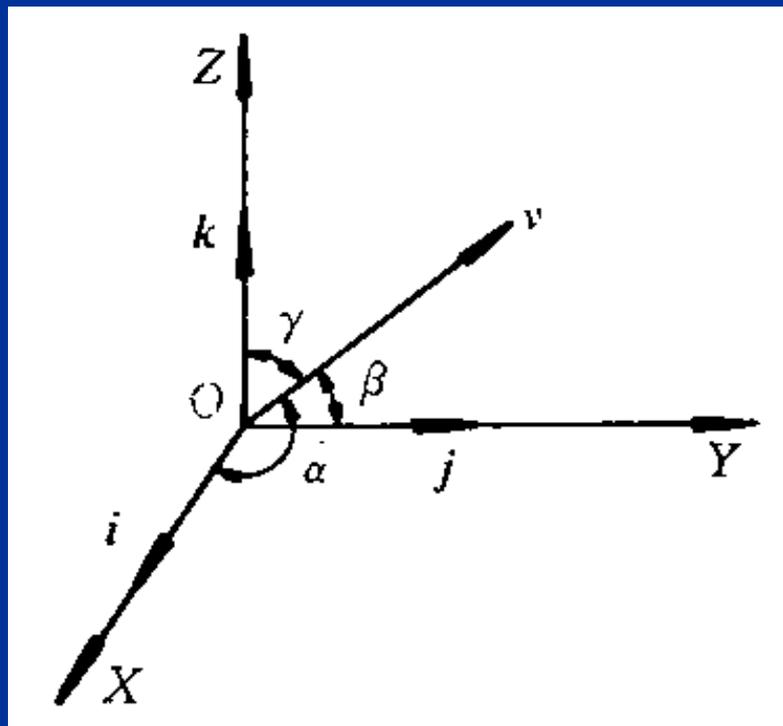


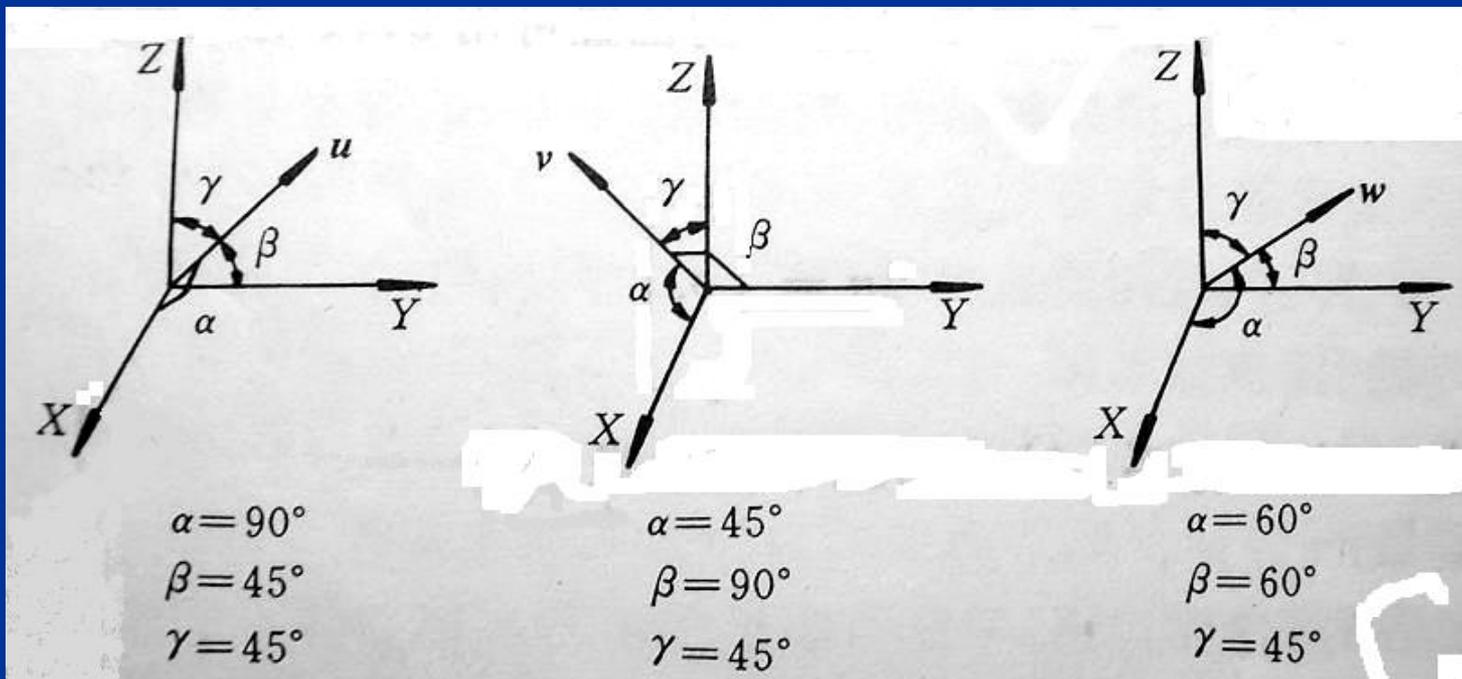
类似地，一个空间矢量的方向表示也用  $(4 \times 1)$  列阵可表达为

$$\mathbf{v} = [a \ b \ c \ 0]^T$$

其中  $a \ b \ c$  是单位方向矢量在各坐标轴上的分量，即该单位向量的方向余弦。

$$a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma$$





**例1** 用齐次坐标写出图中矢量  $u$ 、 $v$ 、 $w$  的方向列阵。

解：矢量  $u$ ：  $\cos\alpha=0$ ，  $\cos\beta=0.707$ ，  $\cos\gamma=0.707$

$$u=[0 \ 0.707 \ 0.707 \ 0]^T$$

矢量  $v$ ：  $\cos\alpha=0.707$ ，  $\cos\beta=0$ ，  $\cos\gamma=0.707$

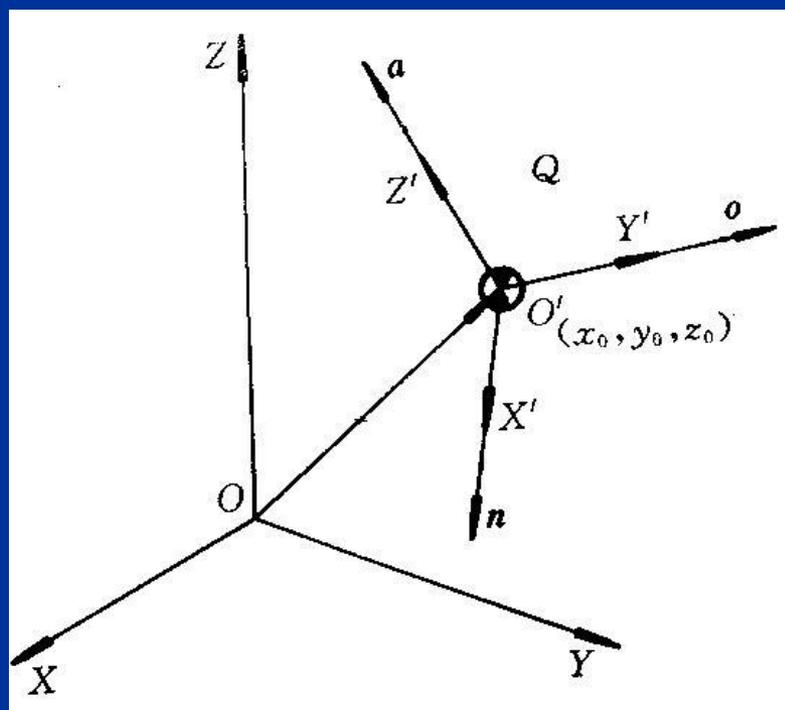
$$v=[0.707 \ 0 \ 0.707 \ 0]^T$$

矢量  $w$ ：  $\cos\alpha=0.5$ ，  $\cos\beta=0.5$ ，  $\cos\gamma=0.707$

$$w=[0.5 \ 0.5 \ 0.707 \ 0]^T$$

### 3、用齐次坐标表示物体在空间中的位姿

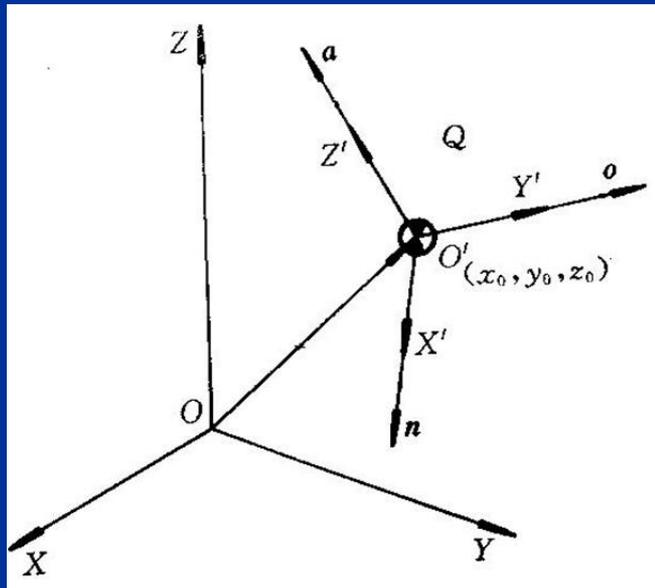
- 在机器人坐标系中，当连杆运动时，位置和姿态固定不变的坐标系称为**固定坐标系或静系**；跟随连杆运动的坐标系称为**动坐标系或简称动系**。
- 动坐标系位姿的描述就是对动坐标系原点位置的描述和对动坐标系各坐标轴方向的描述。



- T既表示了物体在固定坐标系中的方位，也描述了动坐标系在固定坐标系中的姿态。

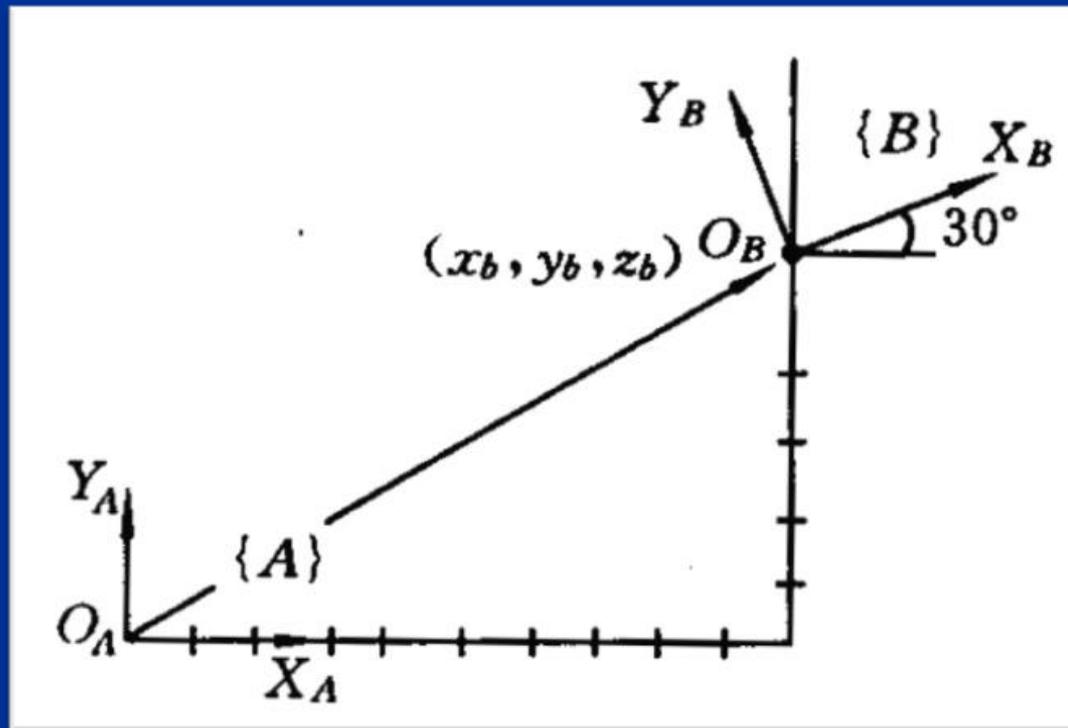
位置

$$T = [n \quad o \quad a \quad p] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & x_0 \\ n_y & o_y & a_y & y_0 \\ n_z & o_z & a_z & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



R即动坐标系  
相对于固定坐  
标系的姿态称  
为姿态矩阵

例2 下图表示固联于刚体的坐标系{B}位于 $O_B$ 点， $x_b=10$ ， $y_b=5$ ， $z_b=0$ 。 $Z_B$ 轴与画面垂直，坐标轴{B}相对固定坐标系{A}有一个 $30^\circ$ 的偏转，试写出表示刚体位姿的坐标系{B}的 $(4 \times 4)$ 的矩阵表达式。



解：XB的方向列阵：

$$\begin{aligned}n &= [\cos 30^\circ \quad \cos 60^\circ \quad \cos 90^\circ \quad 0]^\text{T} \\ &= [0.866 \quad 0.500 \quad 0.000 \quad 0]^\text{T}\end{aligned}$$

YB的方向列阵：

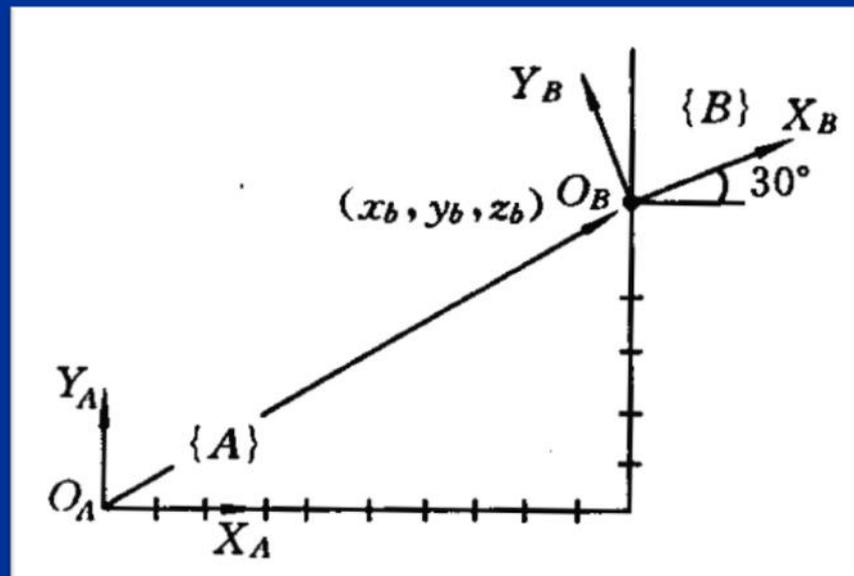
$$\begin{aligned}o &= [\cos 120^\circ \quad \cos 30^\circ \quad \cos 90^\circ \quad 0]^\text{T} \\ &= [-0.500 \quad 0.866 \quad 0.000 \quad 0]^\text{T}\end{aligned}$$

ZB的方向列阵：

$$\begin{aligned}a &= [\cos 90^\circ \quad \cos 90^\circ \quad \cos 0^\circ \quad 0]^\text{T} \\ &= [0.000 \quad 0.000 \quad 1.000 \quad 0]^\text{T}\end{aligned}$$

坐标系{B}的位置阵列：

$$p = [10.0 \quad 5.0 \quad 0.0 \quad 1]^\text{T}$$

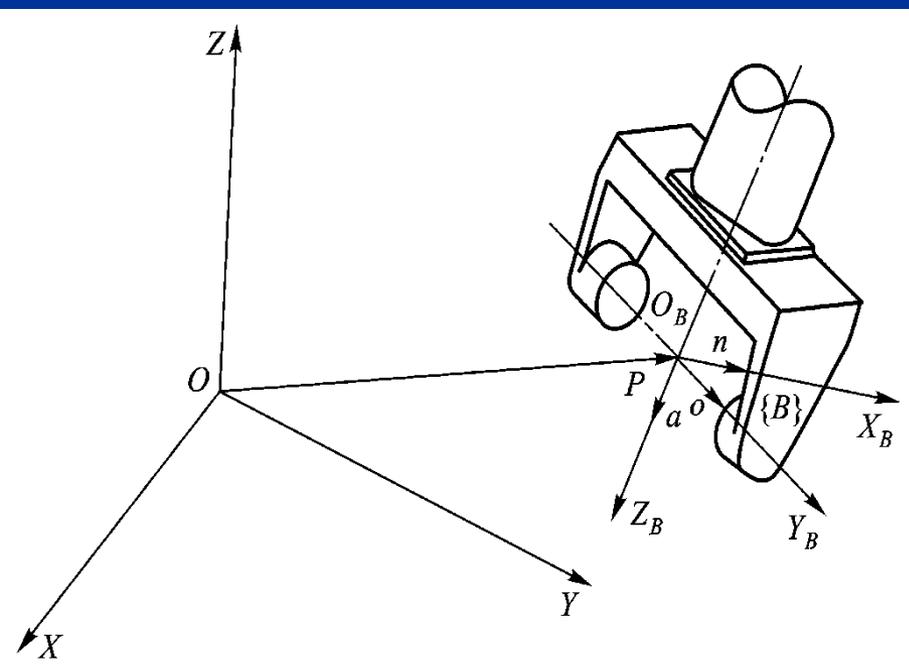


坐标系{B}的位姿为：

$$B = [n \quad o \quad a \quad p] = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 手部位置和姿态的表示

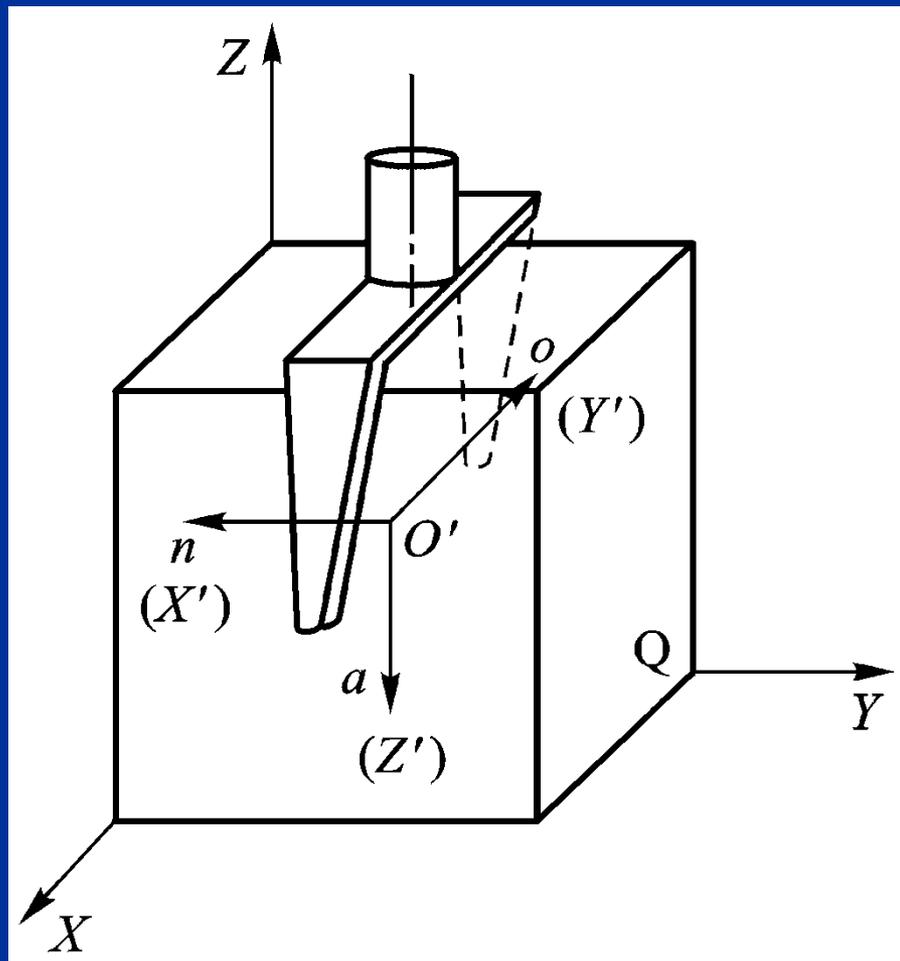
- 机器人手部的位置和姿态也可以用固联在手部的坐标系  $\{B\}$  的位姿来表示，如图所示。



取手部的中心点为原点  $O_B$ ;

- 关节轴为  $Z_B$  轴， $Z_B$  轴的单位方向矢量  $a$  称为**接近矢量**，指向朝外；
- 二手指的连线为  $Y_B$  轴， $Y_B$  轴的单位方向矢量  $o$  称为**姿态（方向）矢量**，指向可任意选定，确定了手部开口的方位；
- $X_B$  轴指向符合右手法则， $X_B$  轴的单位方向矢量  $n$  称为**法向（线）矢量**。

例3 图表示手部抓握物体 $Q$ ，物体为边长2个单位的正立方体，写出表达该手部位姿的矩阵式。



解：因为物体 $Q$ 形心与手部坐标系 $O'X'Y'Z'$ 的坐标原点 $Q'$ 相重合，所以手部位置的 $(4 \times 1)$ 列阵为：

$$P=[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

手部坐标系 $X'$ 轴的方向可用单位矢量 $n$ 来表示：

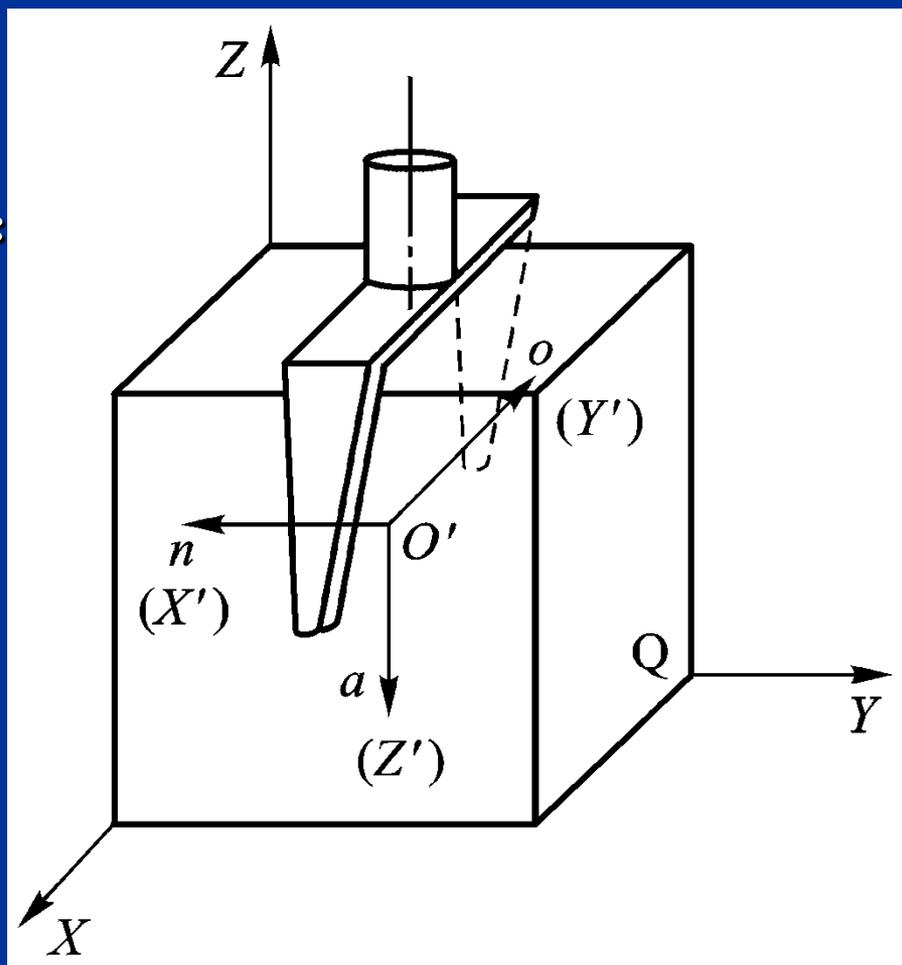
$$n: \alpha=90^\circ \quad \beta=180^\circ \quad \gamma=90^\circ$$

$$n_x = \cos\alpha = 0$$

$$n_y = \cos\beta = -1$$

$$n_z = \cos\gamma = 0$$

$$n=[0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$$



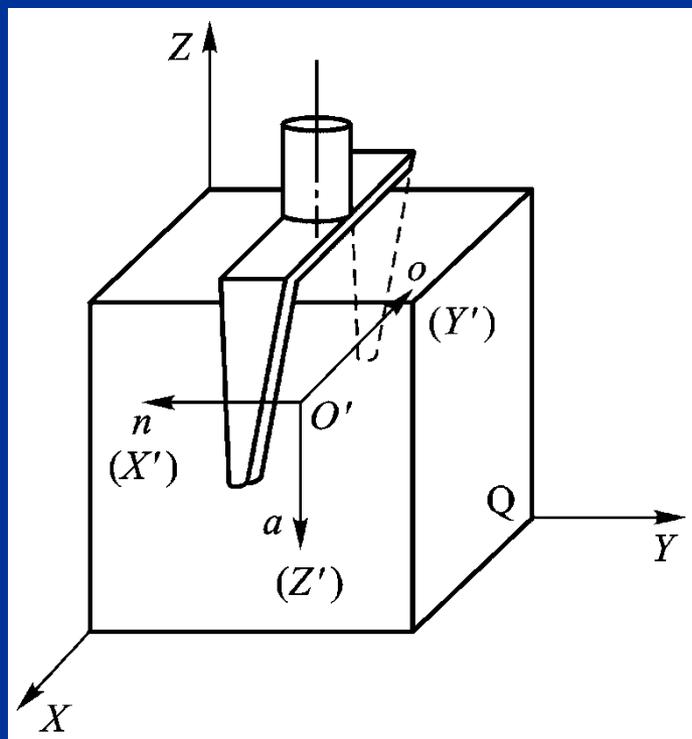
同理，手部坐标系 $Y'$ 轴与 $Z'$ 轴的方向可分别用单位矢量 $o$ 和 $a$ 表示：

$$o: o_x = -1 \quad o_y = 0 \quad o_z = 0$$

$$a: a_x = 0 \quad a_y = 0 \quad a_z = -1$$

则手部位姿可用矩阵表达为

$$T = [n \quad o \quad a \quad p] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

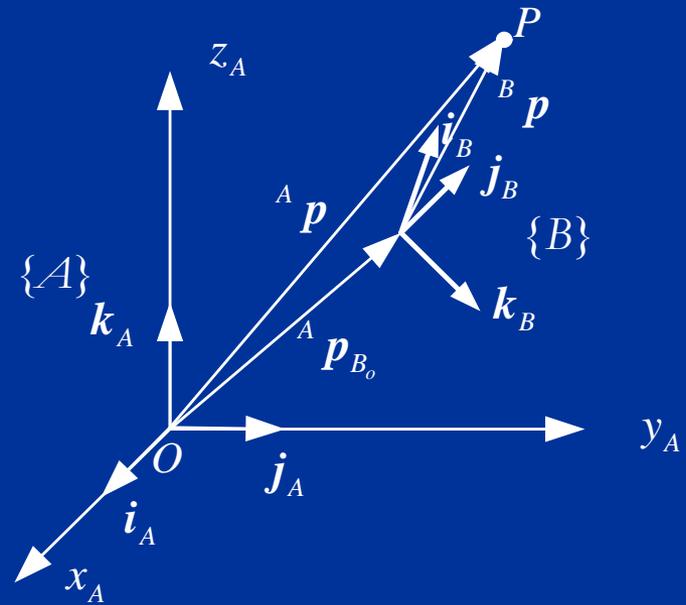
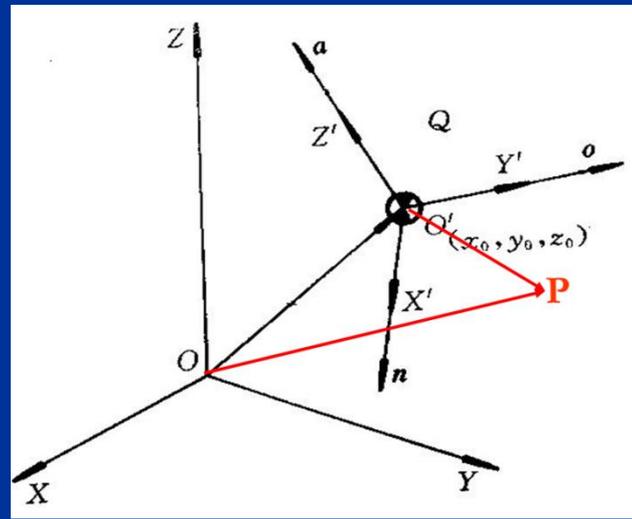


# 4、齐次坐标变换

$$\begin{bmatrix} {}^A \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A \mathbf{p}_{B_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

齐次变换矩阵

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A \mathbf{p}_{B_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 5、齐次坐标变换举例

- ◆ 刚体的运动是由平移和转动组成的。为了能用同一矩阵表示转动和平移，有必要引入  $(4 \times 4)$  的齐次坐标变换矩阵。

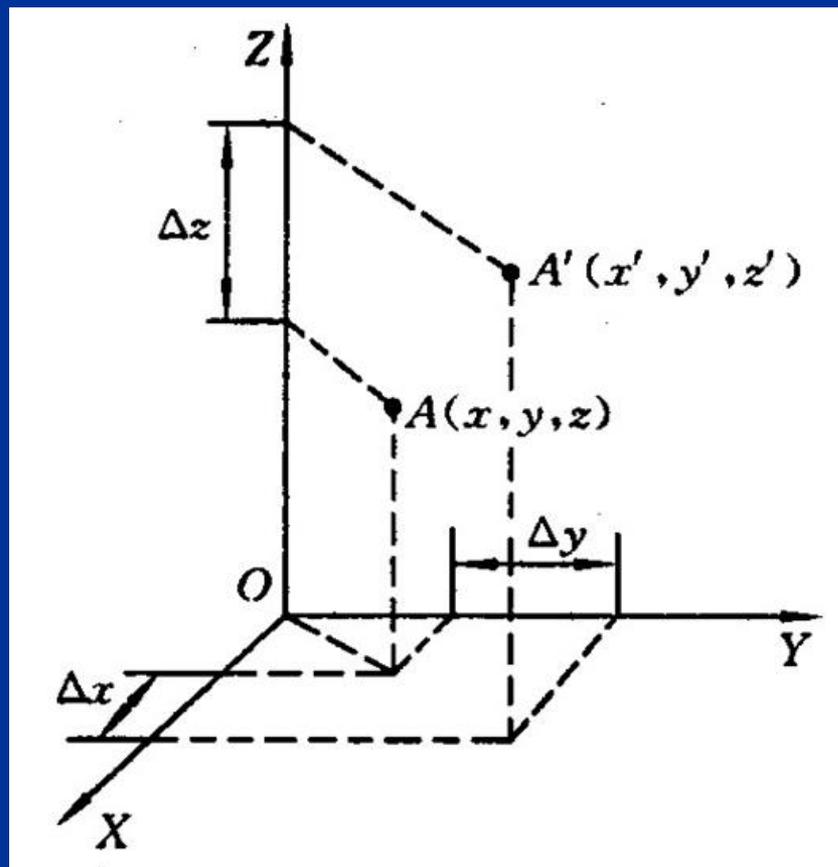
### (1) 平移坐标变换

首先，介绍点在空间直角坐标系中的平移。如图所示，空间某一点  $A$ ，坐标为  $(x, y, z)$ ，当它平移至  $A'$  点后，坐标为  $(x', y', z')$ ，其中：

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$

$$z' = z + \Delta z$$



可用右面形式表示:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

也可以简写为

$$\mathbf{a}' = \text{Trans}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\mathbf{a}$$

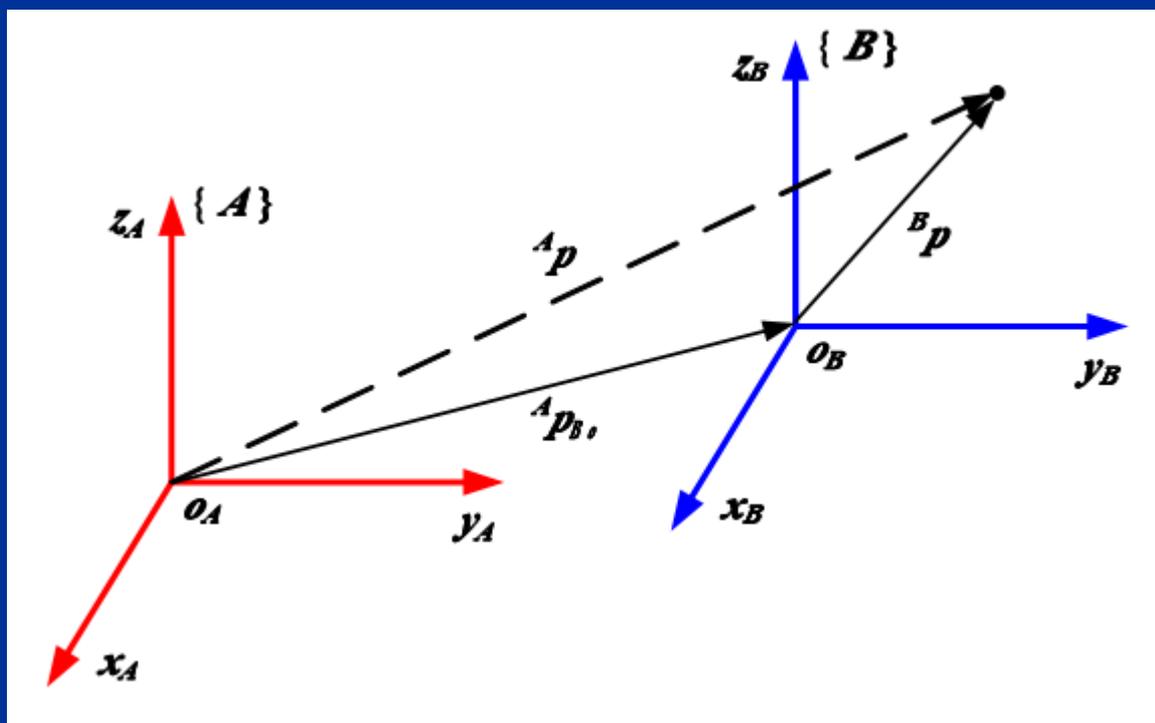
式中,  $\text{Trans}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  表示经平移坐标变换后的齐次坐标变换矩阵

$$\text{Trans}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

说明: 平移变换可以变换顺序

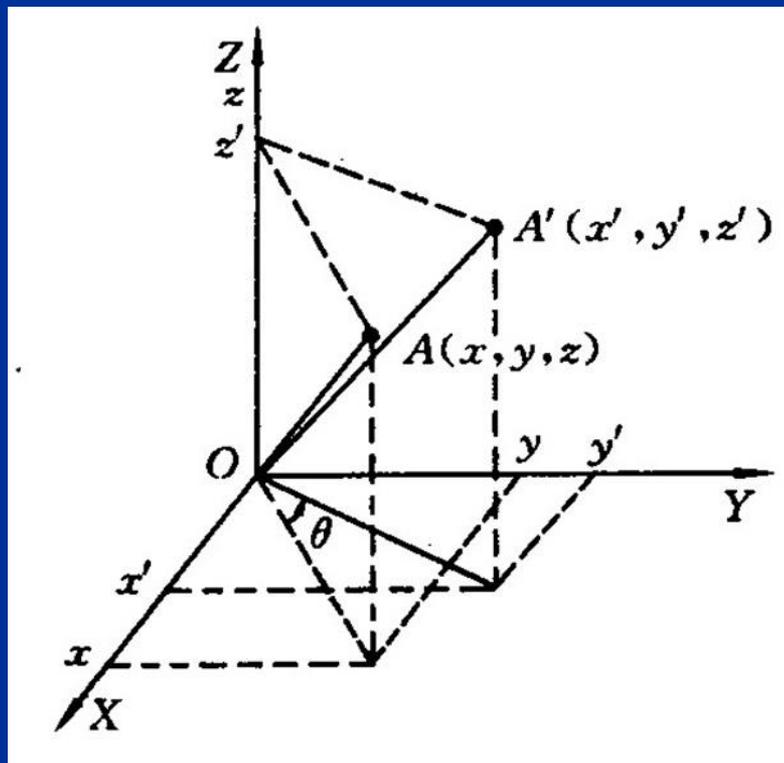
- ◆ 平移变换矩阵不仅适用于点的平移变换，也适用于矢量、坐标系、物体等的平移变换计算

$${}^A \mathbf{p} = {}^B \mathbf{p} + {}^A \mathbf{p}_{B0}$$



## (2) 旋转坐标变换

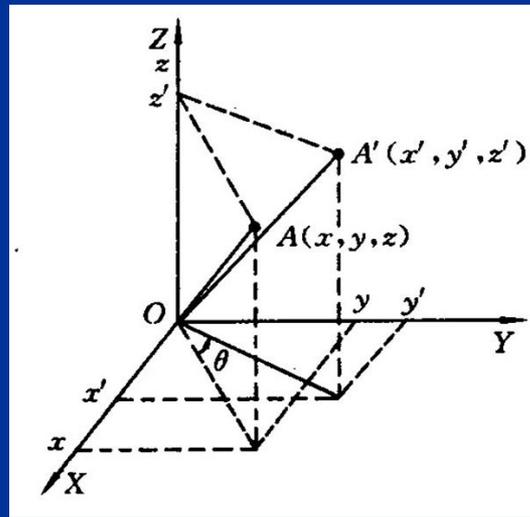
- ⑩ 首先，介绍点在空间直角坐标系中的旋转。如图所示，空间某一点A，坐标为  $(x, y, z)$ ，当它绕Z轴旋转 $\theta$ 角后至 $A'$ 点，坐标为  $(x', y', z')$ ，则 $A'$ 点和A点坐标的关系？



## 推导过程

$$x = r \cos \theta_0$$

$$y = r \sin \theta_0$$



$$x' = r \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$= r \cos \theta_0 \cos \theta - r \sin \theta_0 \sin \theta$$

$$= x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\theta_0 + \theta)$$

$$= r \sin \theta_0 \cos \theta + r \cos \theta_0 \sin \theta$$

$$= y \cos \theta + x \sin \theta$$

A'点和A点的坐标关系为

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

用齐次坐标表示A点绕Z轴的旋转变换过程为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

也可简写为  $\mathbf{a}' = \text{Rot}(z, \theta) \mathbf{a}$

式中:  $\text{Rot}(z, \theta)$  表示动坐标系绕Z轴旋转 $\theta$ 角后所得的变换矩阵

$$\text{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中:

$$c\theta = \cos \theta; s\theta = \sin \theta$$

同理，可写出动坐标系绕X轴旋转和绕Y轴旋转所得的坐标变换矩阵

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与平移变换一样，旋转变换矩阵不仅适用于点的旋转变换，也适用于矢量、坐标系、物体等的旋转变换计算。

说明：旋转变换一般不能变换顺序

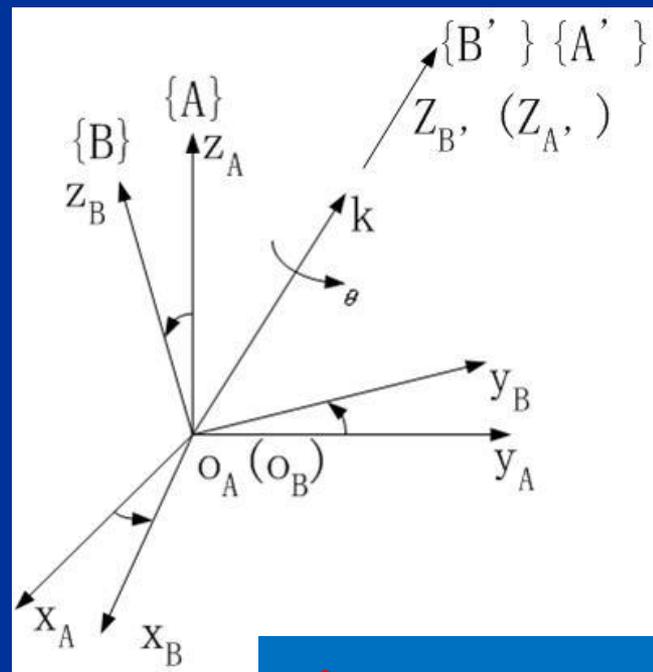
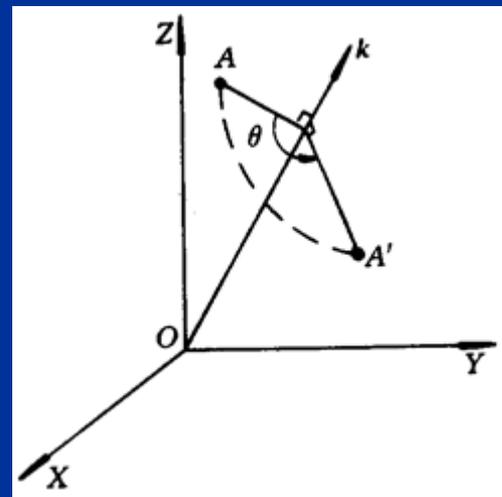
### (3) 广义旋转坐标变换

- 广义旋转变换与绕某一坐标轴的旋转变换不同，其旋转轴线不与参考坐标系中任何轴线重合，而是参考系中某一矢量。这一矢量用单位矢量表示。设 $k$ 是一个坐标系 $C$ 中轴 $CZ$  的单位矢量

$$k = xi + yj + zk$$

$$C = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

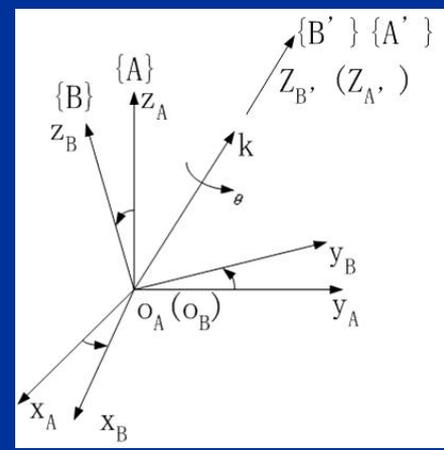
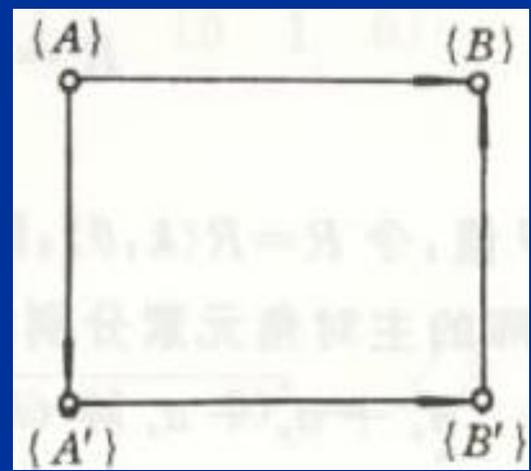
$$k = a_x i + a_y j + a_z k$$



因此  ${}^A_B R = R(k, \theta) = {}^A_{A'} R {}^{A'}_{B'} R {}^{B'}_B R$

$\because {}^{A'}_{B'} R = R(z, \theta)$

$\therefore R(k, \theta) = {}^A_{A'} R R(z, \theta) {}^{B'}_B R^{-1}$   
 $= {}^A_{A'} R R(z, \theta) {}^{B'}_B R^T$



将上式展开可以证得，绕任意过原点的单位矢量k转θ角的旋转变换矩阵为

$$\text{Rot}(k, \theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x \text{vers } \theta + c\theta & k_y k_x \text{vers } \theta - k_z s\theta & k_z k_x \text{vers } \theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y \text{vers } \theta + k_z s\theta & k_y k_y \text{vers } \theta + c\theta & k_z k_y \text{vers } \theta - k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z \text{vers } \theta - k_y s\theta & k_y k_z \text{vers } \theta + k_x s\theta & k_z k_z \text{vers } \theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中：  $\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$

$$\text{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x \text{vers } \theta + c\theta & k_y k_x \text{vers } \theta - k_z s\theta & k_z k_x \text{vers } \theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y \text{vers } \theta + k_z s\theta & k_y k_y \text{vers } \theta + c\theta & k_z k_y \text{vers } \theta - k_x s\theta & 0 \\ k_x k_y \text{vers } \theta - k_y s\theta & k_y k_z \text{vers } \theta + k_x s\theta & k_z k_z \text{vers } \theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中:  $\text{vers } \theta = 1 - \cos \theta$

上式称为一般旋转齐次变换通式，它概括了绕X轴、Y轴及Z轴进行旋转齐次变换的各种特殊情况，例如：

当 $k_x=1$ ，即 $k_y=k_z=0$ 时，则由上式可得到绕X轴的旋转变换矩阵；

当 $k_y=1$ ，即 $k_x=k_z=0$ 时，则由上式可得到绕Y轴的旋转变换矩阵；

当 $k_z=1$ ，即 $k_x=k_y=0$ 时，则由上式可得到绕Z轴的旋转变换矩阵。

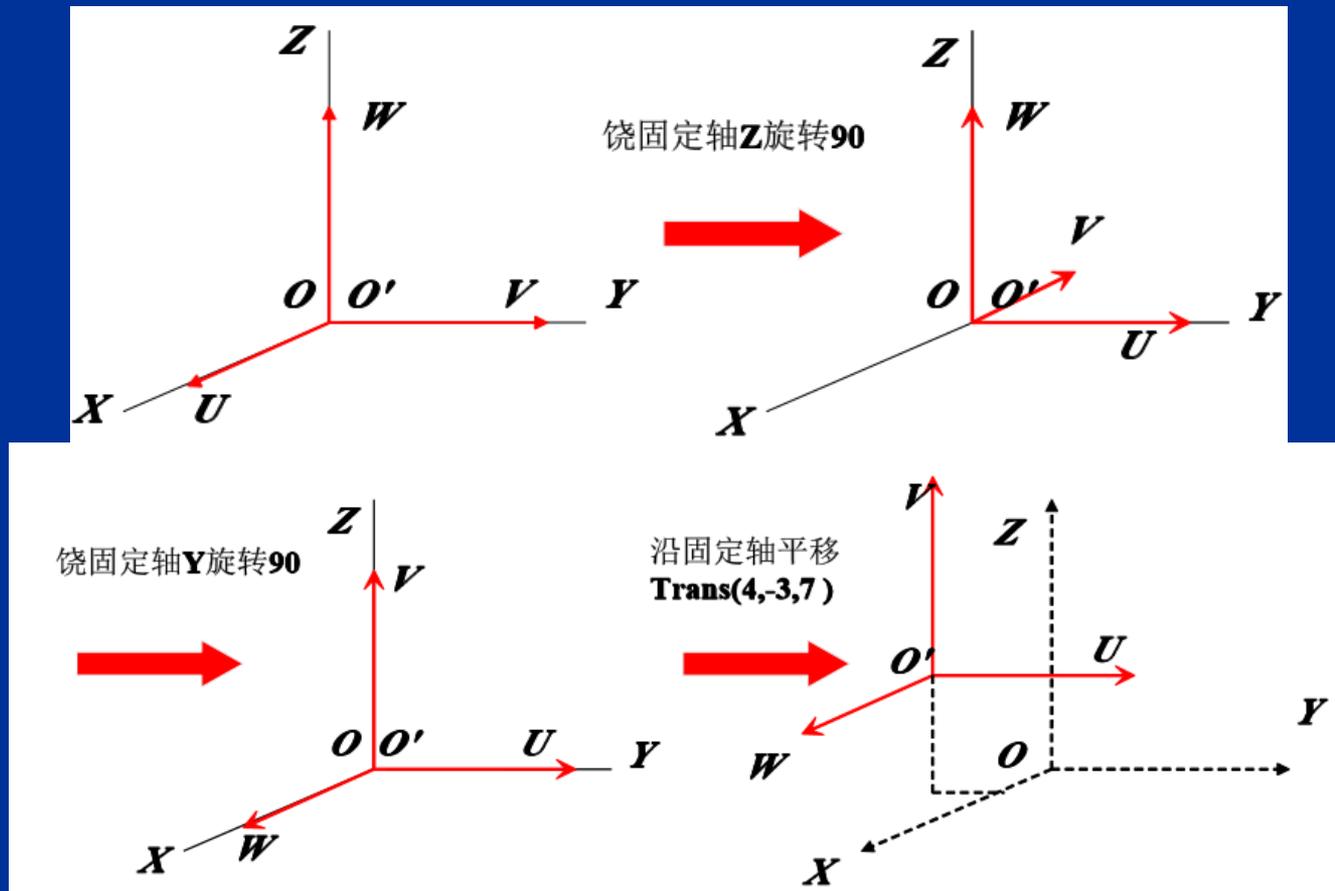
### (3) 复合齐次坐标变换

※ 复合变换是有固定参考坐标系或当前运动坐标系的一系列沿轴平移和绕轴旋转变换所组成的。任何变换都可以分解为按一定顺序的一组平移和旋转变换。

※ 为了完成所要求的变换，可以先绕X轴旋转，再沿X, Y, Z轴平移，最后绕Z轴旋转。变换顺序很重要，如果颠倒变换顺序，结果将会完全不同。

# ◆ 相对于参考坐标系的变换

例1, 活动坐标系 $O'UVW$ 与固定参考坐标系 $OXYZ$ 初始位置重合, 经下列坐标变换: 绕 $Z$ 轴旋转 $90^\circ$ , 再绕 $Y$ 轴旋转 $90^\circ$ , 最后相对于固定坐标系平移位置向量 $4i-3j+7k$ , 如图所示, 求复合齐次变换矩阵 $T$ 。



解：活动坐标系绕固定坐标系Z轴旋转 $90^\circ$ 的齐次坐标变换矩阵为

$$T_1 = \text{Rot}(z, 90)$$

活动坐标系绕固定坐标系Y轴旋转 $90^\circ$ 的齐次坐标变换矩阵为

$$T_2 = \text{Rot}(y, 90)$$

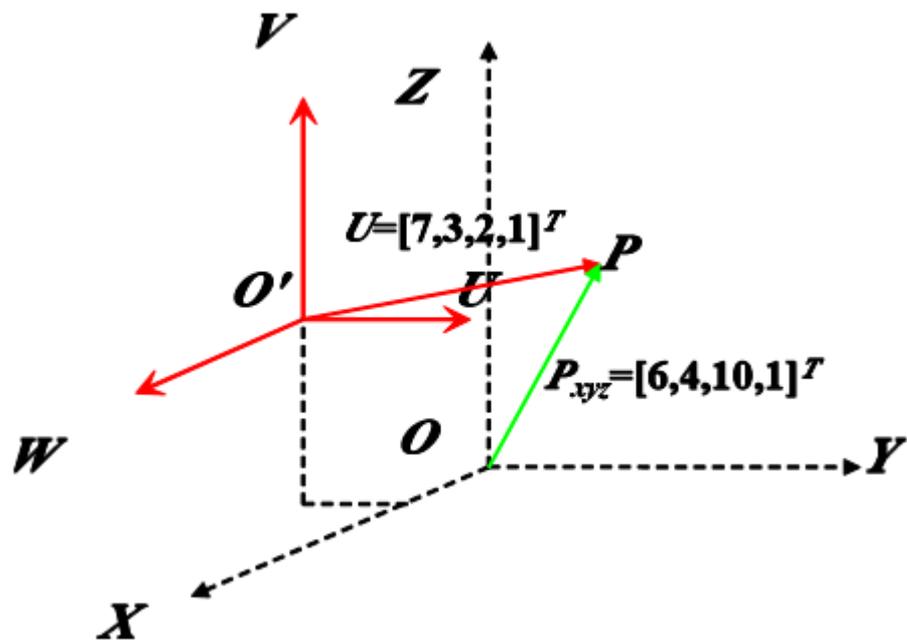
活动坐标平移 $4i-3j+7k$ 的齐次坐标变换矩阵为

$$T_3 = \text{Trans}(4, -3, 7)$$

故复合齐次坐标变换矩阵T为

$$T = T_3 T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例2， 如果考虑固结于活动坐标系上的一点， 假设为 $U=7i+3j+2k$ ， 在任何时刻该向量在 $O'UVW$ 坐标系的表达式是不变的， 活动坐标系在经过上述例1的变换后， 在固定坐标系 $OXYZ$ 中表示为向量 $P_{xyz}$ ， 那么该向量表达式是什么？



$$3,7) \text{Rot}(y, 90) \text{Rot}(z, 90) U$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$T_3$  平移  $T_2 T_1$  旋转

$T$  复合

例3, 根据上例, 假定活动坐标系上的点P (7,3,2)<sup>T</sup>经历相同变换, 但变换按如下不同顺序进行, 求出变换后该点相对于固定坐标系的坐标。

- (1) 绕Z轴旋转90° ;
- (2) 然后平移[4, -3, 7];
- (3) 最后, 绕Y轴旋转90°

解: 表示该点坐标的方程为:

$$P_{xyz} = Rot(y,90)Trans(4,-3,7)Rot(z,90)P_{uvw}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## ◆ 相对于当前坐标系的变换

- ※ 以上讨论的所有变换都是相对于固定参考坐标系。事实上，也有可能做相对于动坐标系或当前坐标系的轴的变换。
- ※ 例如，可以相对于动坐标系的U轴而不是参考坐标系的X轴旋转90度。
- ※ 由于运动坐标系中的点或物体的位置总是相对于动坐标系测量的，所以总是右乘描述该点或物体的位置矩阵。

例4， 假设与例3中对相同的点进行相同变换，但所有变换都是相对于当前的动坐标系，具体变换如下。求出变换完成后该点相对于固定坐标系的坐标

- (1) 绕W轴旋转 $90^\circ$ ；
- (2) 然后沿U、V、W轴平移[4, -3, 7]；
- (3) 最后，绕V轴旋转 $90^\circ$

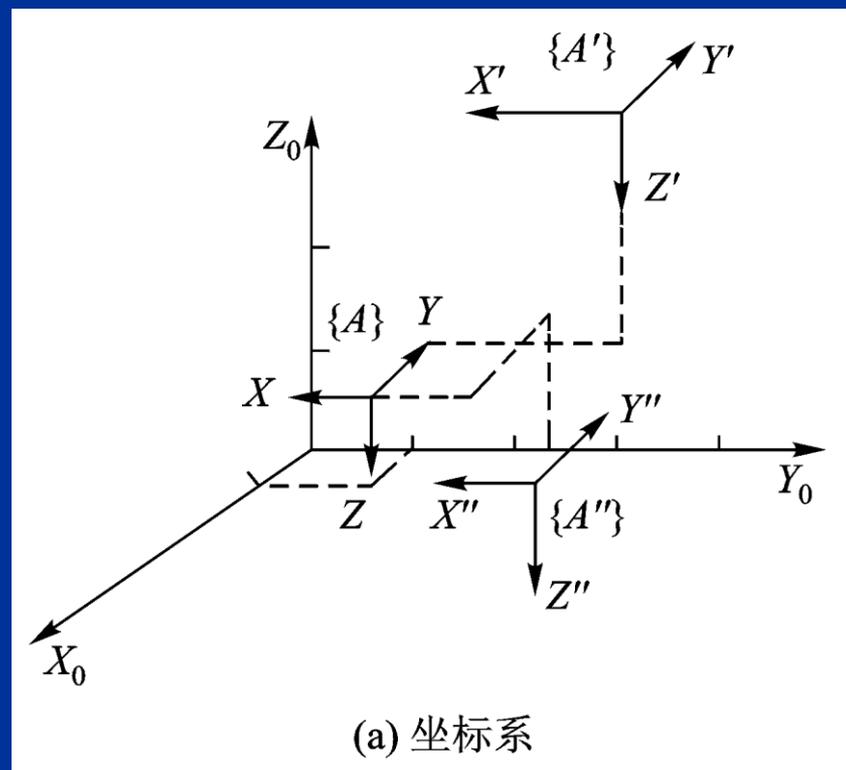
解：因为变换相对于当前坐标系，因此每个变换矩阵依次右乘，可得表示该点坐标的方程为：

$$\begin{aligned} P_{xyz} &= Rot(w,90)Trans(4,-3,7)Rot(v,90)P_{uvw} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## (4) 齐次坐标变换综合应用举例

例1, 如图所示, 动坐标系  $\{A\}$  相对于固定坐标系的  $X_0Y_0Z_0$  轴作  $(-1, 2, 2)$  平移后到  $\{A'\}$ ; 动坐标系  $\{A\}$  相对于自身坐标系 (即动系) 的  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴分别作  $(-1, 2, 2)$  平移后到  $\{A''\}$ ; 已知:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



写出  $\{A'\}$ 、 $\{A''\}$  的矩阵表达式。

解：动坐标系 {A} 的两个平移坐标变换矩阵均为

$$\text{Trans}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

{A'} 坐标系是动系 {A} 沿固定坐标系作平移变换得来的，因此变换矩阵左乘，{A'} 的矩阵表达式为

$$A' = \text{Trans}(-1, 2, 2)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

{A''} 坐标系是动系 {A} 沿自身坐标系作平移变换得来的，因此矩阵右乘，{A''} 的矩阵表达式为

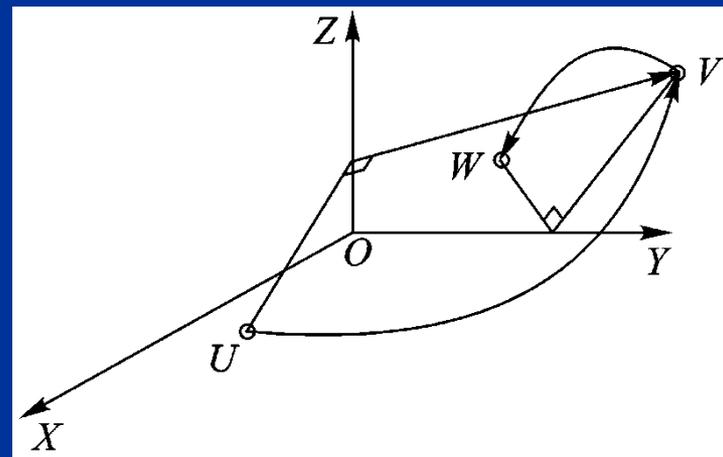
$$A'' = A \cdot \text{Trans}(-1, 2, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例2, 已知坐标系中点 $U$ 的位置矢量 $u=[7 \ 3 \ 2 \ 1]^T$ , 将此点绕 $Z$ 轴旋转 $90^\circ$ , 再绕 $Y$ 轴旋转 $90^\circ$ , 如图所示, 求旋转变换后所得的点 $W$ 。

解:  $w = \text{Rot}(y, 90^\circ)\text{Rot}(z, 90^\circ)u$

$$= \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



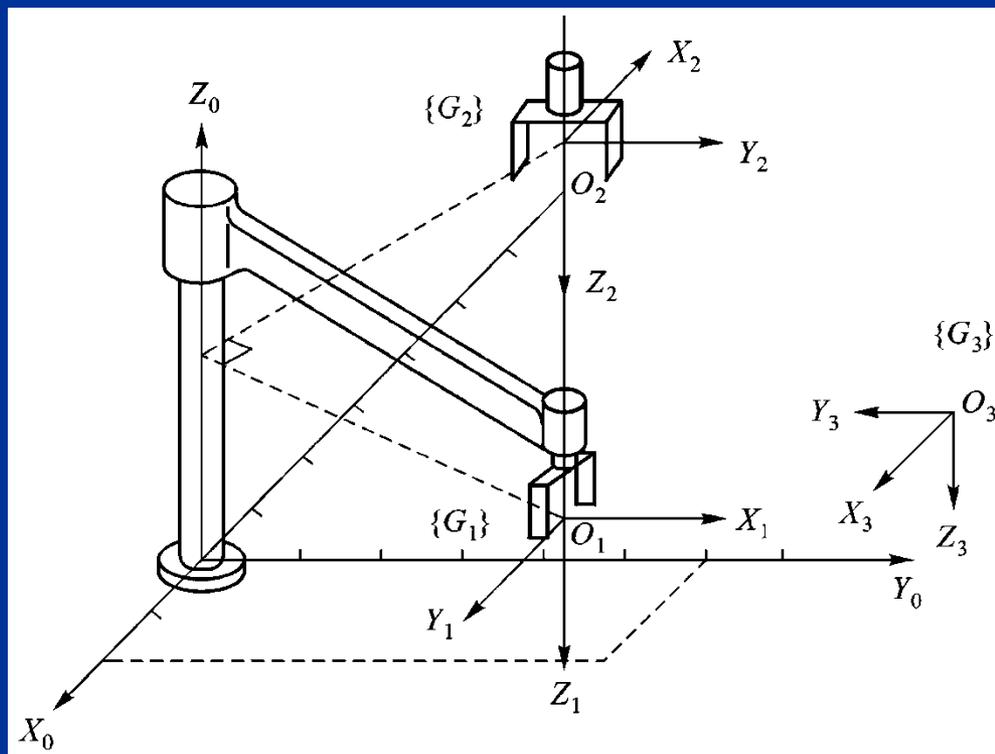
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例3，如图所示单臂操作手，手腕也具有一个自由度。已知手部起始位姿矩阵为

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 若手臂绕 $Z_0$ 轴旋转 $+90^\circ$ ，则手部到达 $G_2$ 点；
- (2) 若手臂不动，仅手部绕手腕 $Z_1$ 轴转 $+90^\circ$ ，则手部到达 $G_3$ 点。

请写出手部坐标系 $\{G_2\}$ 、 $\{G_3\}$ 的矩阵表达式。



解：手臂绕定轴转动是相对固定坐标系作旋转变换，所以

$$\mathbf{G}_2 = \text{Rot}(z, 90^\circ)\mathbf{G}_1$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

手部绕手腕轴旋转是相对动坐标系作旋转变换，所以

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_1 \text{Rot}(z, 90^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 复合齐次变换小结

- 相对变换：

当活动坐标系绕固定坐标系各坐标轴顺序有限次转动或移动时，其复合齐次变换矩阵为各基本变换矩阵依变化顺序左乘

- 绝对变换：

当活动坐标系相对于自身坐标系的当前坐标轴旋转或平移，则齐次变换矩阵为依次右乘，称为相对变换

# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

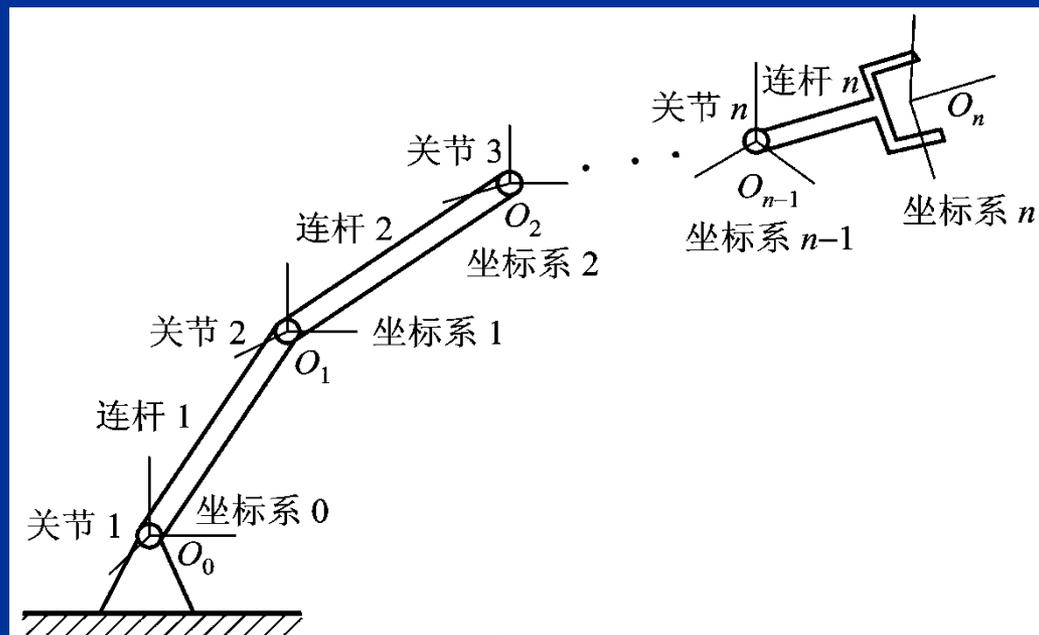
# 1、多级坐标变换

- 从坐标系  $\{O_n: x_n, y_n, z_n\}$  到坐标系  $\{O_0: x_0, y_0, z_0\}$  经过了  $n$  级的逐次坐标变换，且每次都是**坐标系相对于自身**进行变换的。
- 若求出任一个相邻两级之间的坐标变换矩阵  $T_i$ ，则坐标系  $\{O_n: x_n, y_n, z_n\}$  到坐标系  $\{O_0: x_0, y_0, z_0\}$  之间的坐标变换矩阵可表示为： $T = T_1 T_2 T_3 T_4 \dots T_{n-1} T_n$

相应的齐次坐标变换方程式

为： $X = T X_n$

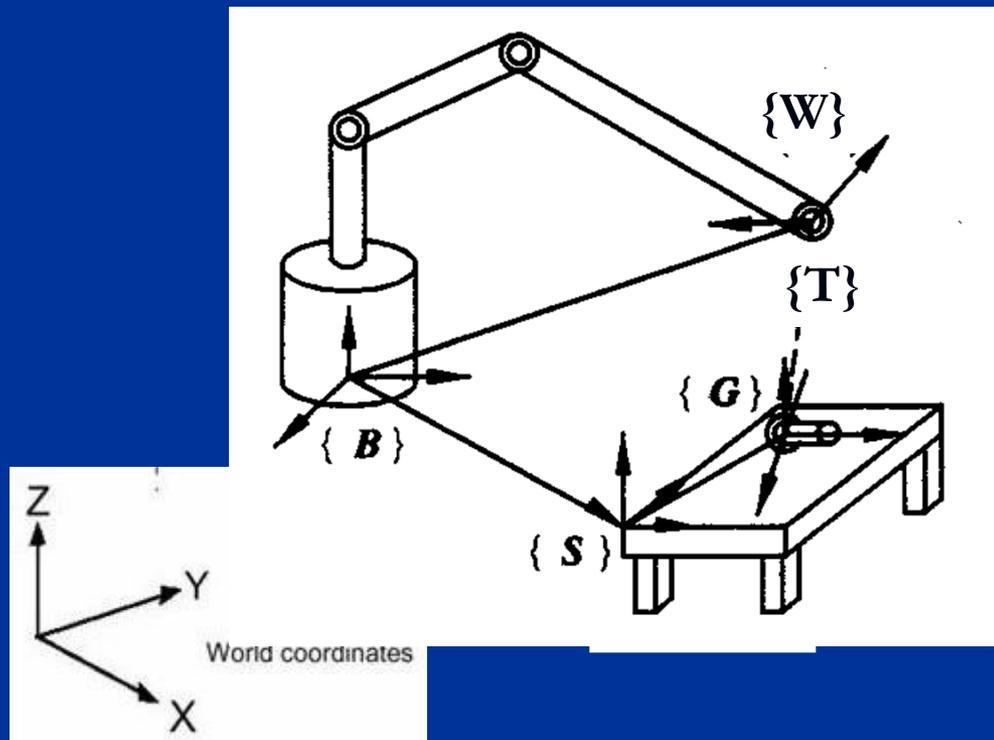
式中： $X = [X \ Y \ Z \ 1]^T$ ，  
 $X_n = [X_n \ Y_n \ Z_n \ 1]^T$



## 2、多种坐标系的变换

### (1) 多种坐标系

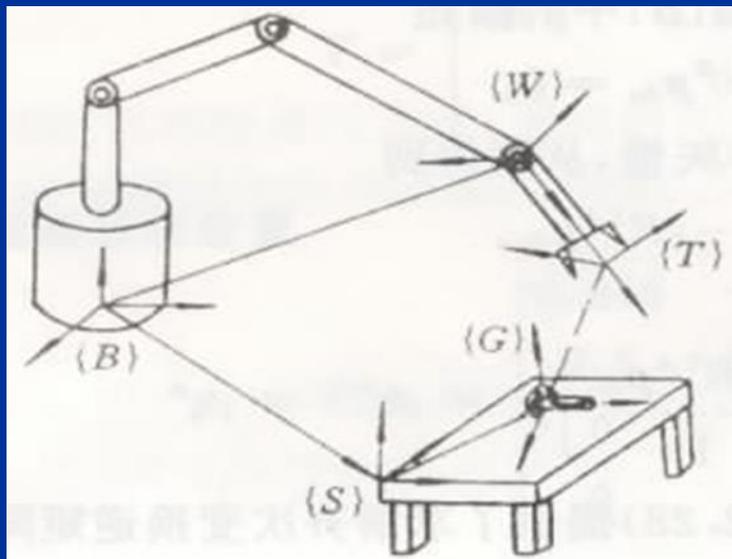
- 通用世界坐标系 {U}
- 基（固定）坐标系 {B}，又表示为 {0}
- 腕坐标系 {W}
- 工具坐标系 {T}
- 工作台（用户）坐标系 {S}
- 目标（工件）坐标系 {G}



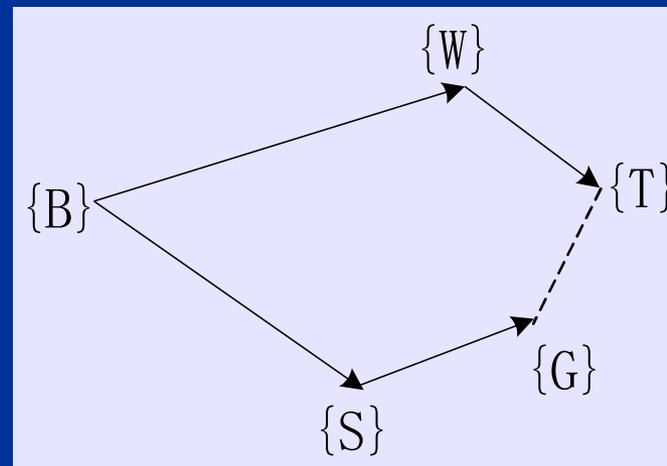
规定各种坐标系来描述机器人与环境的相对位姿关系。

建立机器人各连杆之间，机器人与周围环境之间的运动关系，用于描述机器人的操作。

## (2) 多种坐标系之间的变换矩阵—变换过程具有封闭性



画出空间尺寸链图为:



因此有

$${}^B T = {}^B T {}^W T$$

$${}^B T = {}^B T {}^S T {}^G T$$

坐标系之间的位姿关系可用相应的齐次变换来描述。

由上面两式得变换方程:

$${}^B T {}^W T = {}^B T {}^S T {}^G T$$



$${}^B T = {}^B T {}^S T {}^G T {}^W T^{-1}$$

# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

**3.5 RPY角与欧拉角**

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

## RPY角和欧拉角的引入

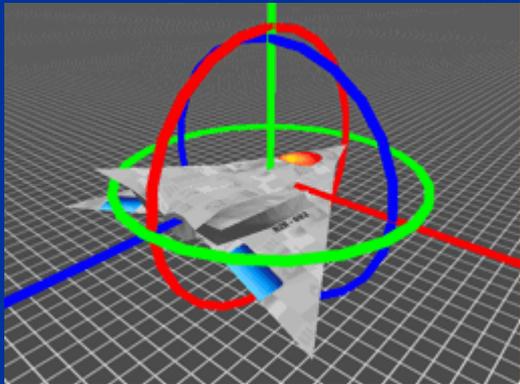
### 怎么简便的描述活动坐标系的方位？

一般旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的九个因素中，只有三个是独立变量，计算起来比较方便，但却不能简洁明了的表示机械手的方位，因此引入RPY角和欧拉角来表示机械手在空间的方位。

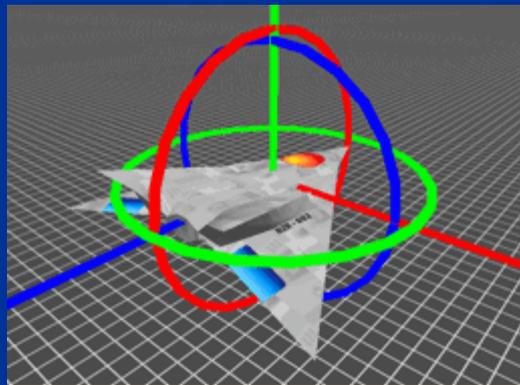
$$\text{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x \text{vers } \theta + c\theta & k_y k_x \text{vers } \theta - k_z s\theta & k_z k_x \text{vers } \theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y \text{vers } \theta + k_z s\theta & k_y k_y \text{vers } \theta + c\theta & k_z k_y \text{vers } \theta - k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z \text{vers } \theta - k_y s\theta & k_y k_z \text{vers } \theta + k_x s\theta & k_z k_z \text{vers } \theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 1、RPY角（绕固定轴x-y-z旋转）--相对变换

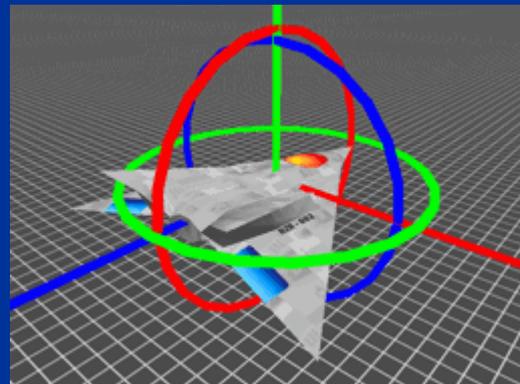
## RPY角的规定方法



回转 (R)

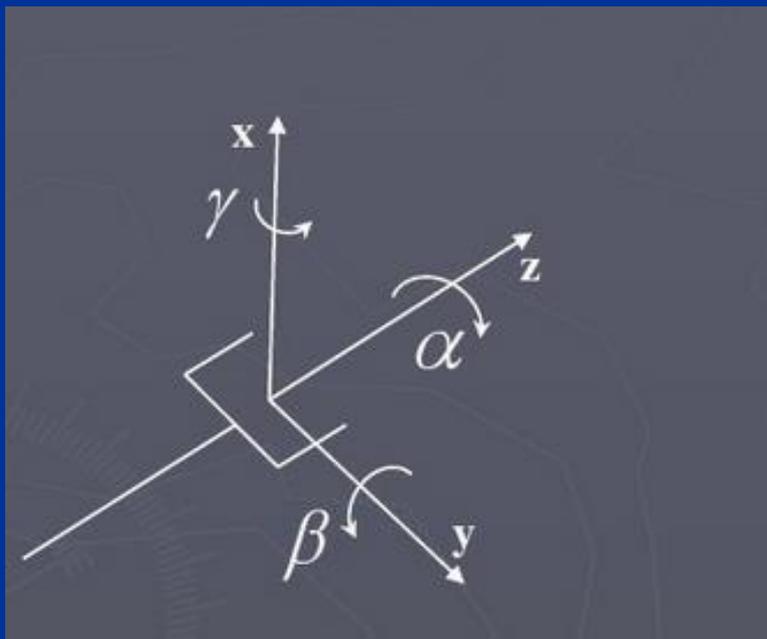


俯仰 (P)



偏转 (Y)

操作臂RPY角的定义



# 1、RPY角（绕固定轴x-y-z旋转）--相对变换

动坐标系初始方位与固定坐标系重合，动坐标系绕固定坐标系的X、Y、Z轴依次进行旋转，各齐次变换矩阵按“从右向左”依次相乘原则进行运算（左乘）。

$$RPY(\varphi, \theta, \psi) = Rot(z, \varphi)Rot(y, \theta)Rot(x, \psi)$$

(3)            (2)            (1)

$$RPY(\varphi, \theta, \psi) = Rot(z, \varphi)Rot(y, \theta)Rot(x, \psi)$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi & 0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2、欧拉角—绝对变换

### (1)、绕动坐标系z-y-x转动的欧拉角

动坐标系初始方位与固定坐标系重合，动坐标系绕其Z轴旋转 $\alpha$ 角，然后绕动Y轴旋转 $\beta$ 角，最后绕动X轴旋转 $\gamma$ 角。三次转动均相对于动坐标系的某个轴进行的。这样的三次转动角称为欧拉角

$$\text{Euler}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \gamma)$$

## (2) 绕动坐标系z-y-z转动的欧拉角

描述法则如下：动坐标系初始方位与固定坐标系重合，动坐标系绕其Z轴旋转 $\alpha$ 角，然后绕动Y轴旋转 $\beta$ 角，最后绕动Z轴旋转 $\gamma$ 角。

$$\mathbf{Euler}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{Rot}(z, \alpha) \mathbf{Rot}(y, \beta) \mathbf{Rot}(z, \gamma)$$

# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

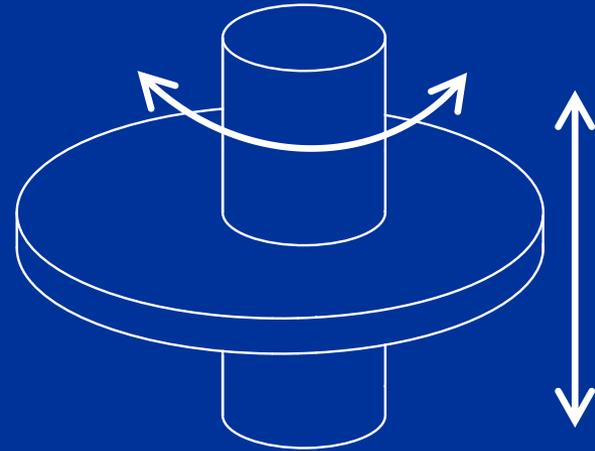
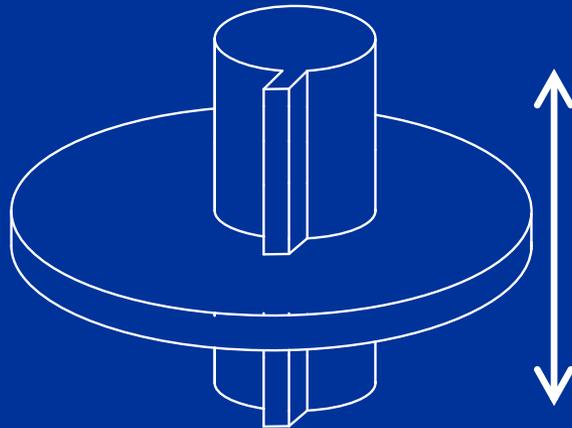
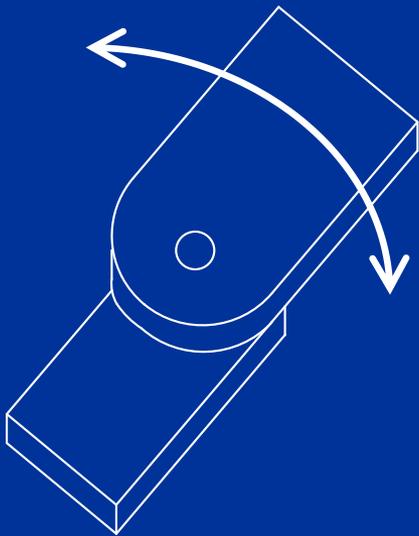
# 知识点回顾---关节和连杆

- ◆关节与连杆：工业机器人由若干运动副和杆件连接而成，这些杆件称为**连杆**，连接相邻两个连杆的运动副称为**关节**。
- ◆多自由度关节可以看成多个**单自由度关节与长度为零**的连杆构成。
- ◆单自由度关节分为**平移关节和旋转关节**。

# 知识点回顾---关节和连杆

## 高副、低副

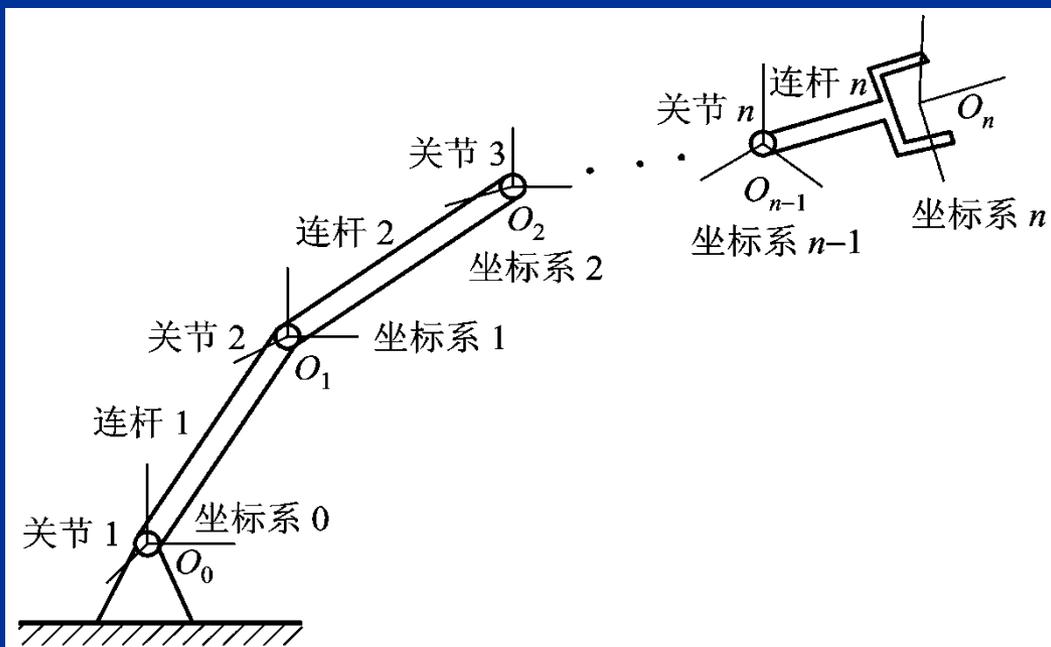
常见低副形式



- 每个关节确定一个自由度
- 如果某个关节有两个运动，分解为两个单自由度的关节考虑。

## 3.6.1、D-H参数法

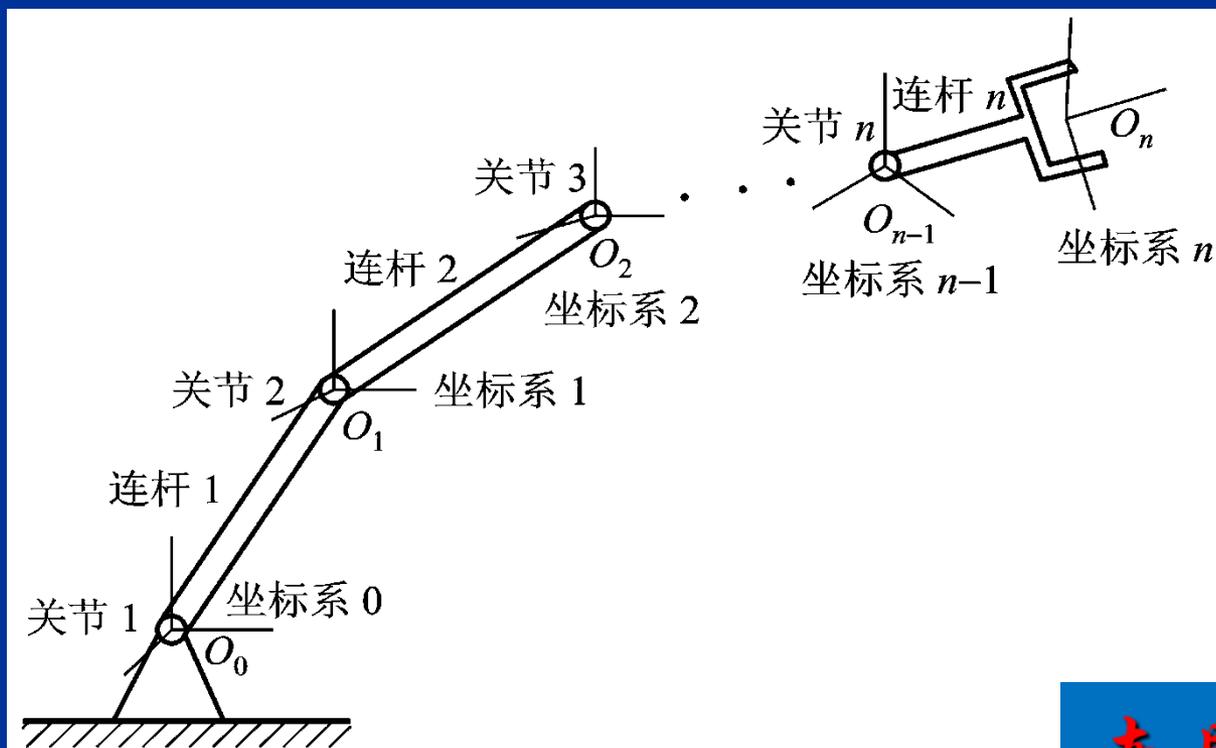
- 为关节链中的每一个杆件建立坐标系的矩阵方法称为D-H参数法



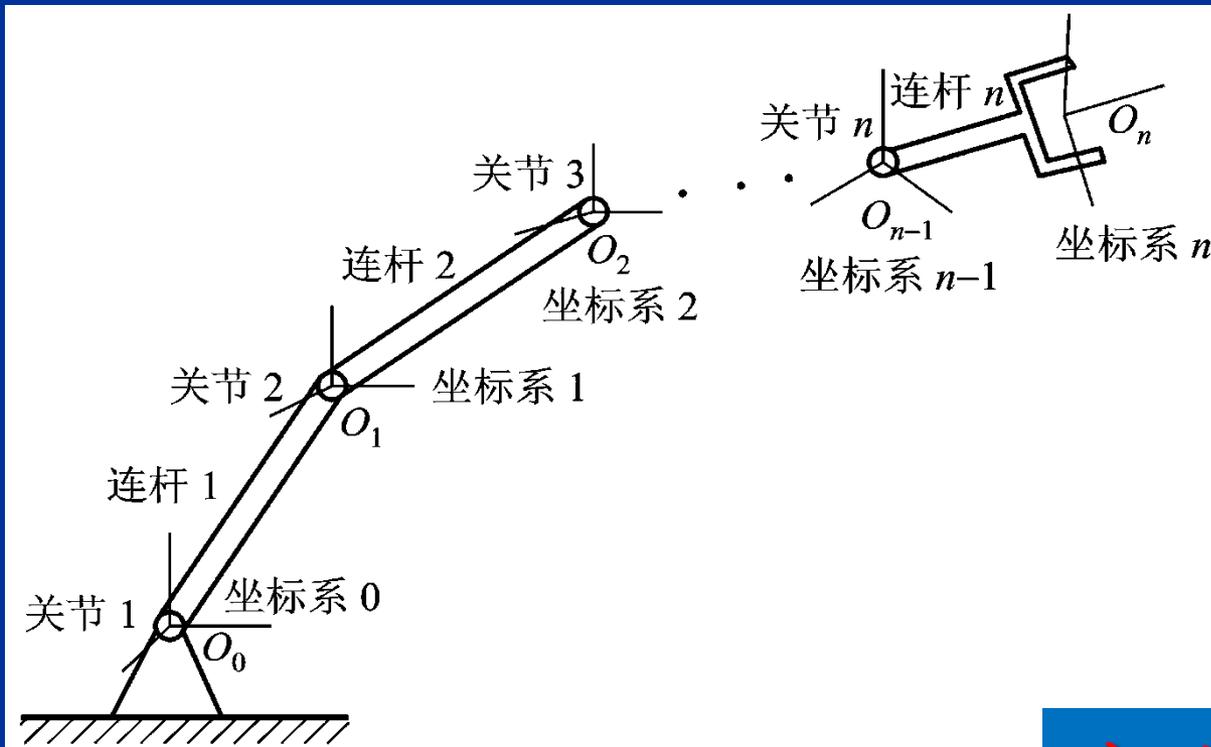
- D-H模型表示了对机器人连杆和关节进行建模的一种非常简单的方法，可用于任何机器人构型不管机器人的结构顺序和复杂程度如何
- 可用于表示已经讨论过的（直角坐标、圆柱坐标、欧拉角坐标等）在任何坐标中的变换

# 1、机器人坐标系的分配

- 顺序：按从机座到末端操作器的顺序，由低到高依次为各关节和各连杆编号。
- 连杆编号：机座的编号为连杆0，与机座相连的连杆编号为连杆1，依此类推。



- **关节编号**：机座与连杆1的关节编号为关节1，连杆1与连杆2的连接关节编号为2，依此类推。
- **坐标系分配**：在每一个连杆上建立一个坐标系，该坐标系的Z轴与连杆末端关节的轴线重合。



## 2、连杆参数及连杆坐标系的建立

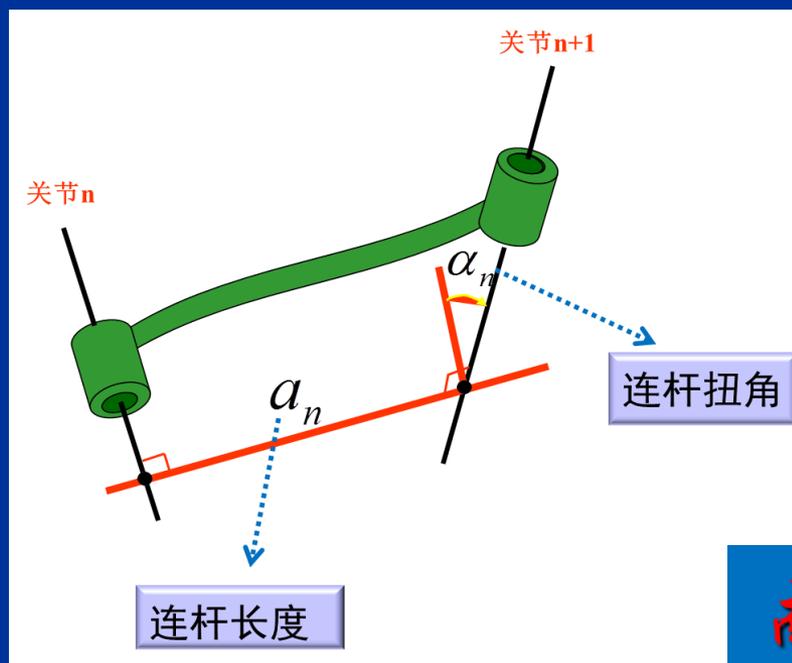
### 1、连杆参数

连杆参数包括**连杆尺寸参数**和**连杆关系参数**两组。

#### 1) 连杆尺寸参数

连杆 $i$ 两端有关节 $i$ 和 $i+1$ 。该连杆尺寸可以用两个量来描述：

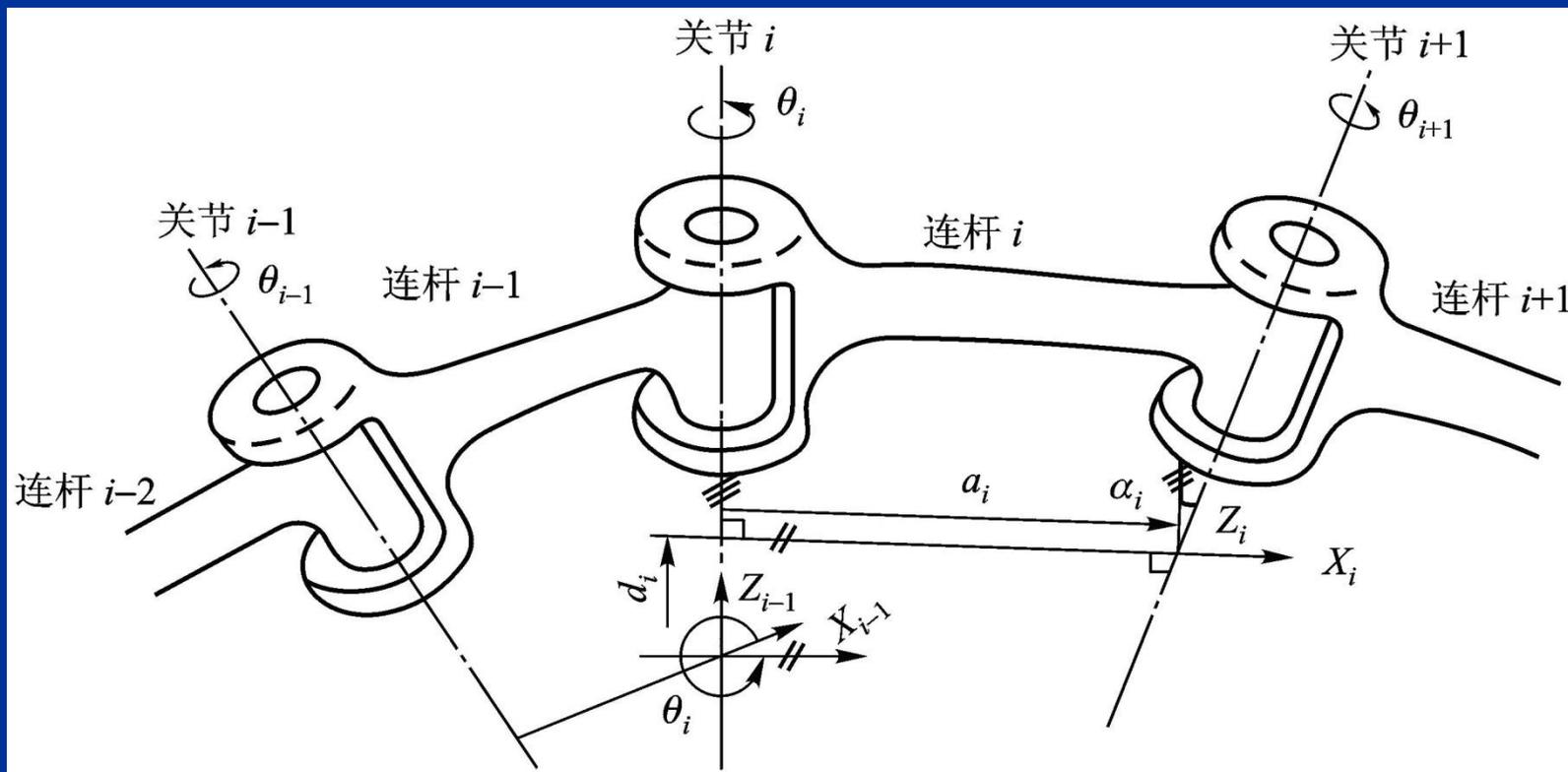
- ◆ (1) **连杆长度 $a_i$** ：两个关节轴线沿公垂线的距离（恒正）
- ◆ (2) **连杆扭角 $\alpha_i$** ：垂直于 $a_i$ 的平面内两个轴线的夹角（有正负，方向 $i$ 到 $i+1$ ）



## 2) 连杆关系参数

连杆 $i-1$ 和连杆 $i$ 通过关节 $i$ 相连。其相对位置可以用两个参数来描述：

- ◆ (1) **连杆间距离 $d_i$** ：沿关节 $i$ 轴线两个公垂线的距离
- ◆ (2) **连杆间转角 $\theta_i$** ：垂直于关节 $i$ 轴线的平面内两个公垂线的夹角



## ■ 小结:

每个连杆可以由四个参数所描述：其中两个描述连杆尺寸；另外两个描述连杆与相邻连杆的连接关系。

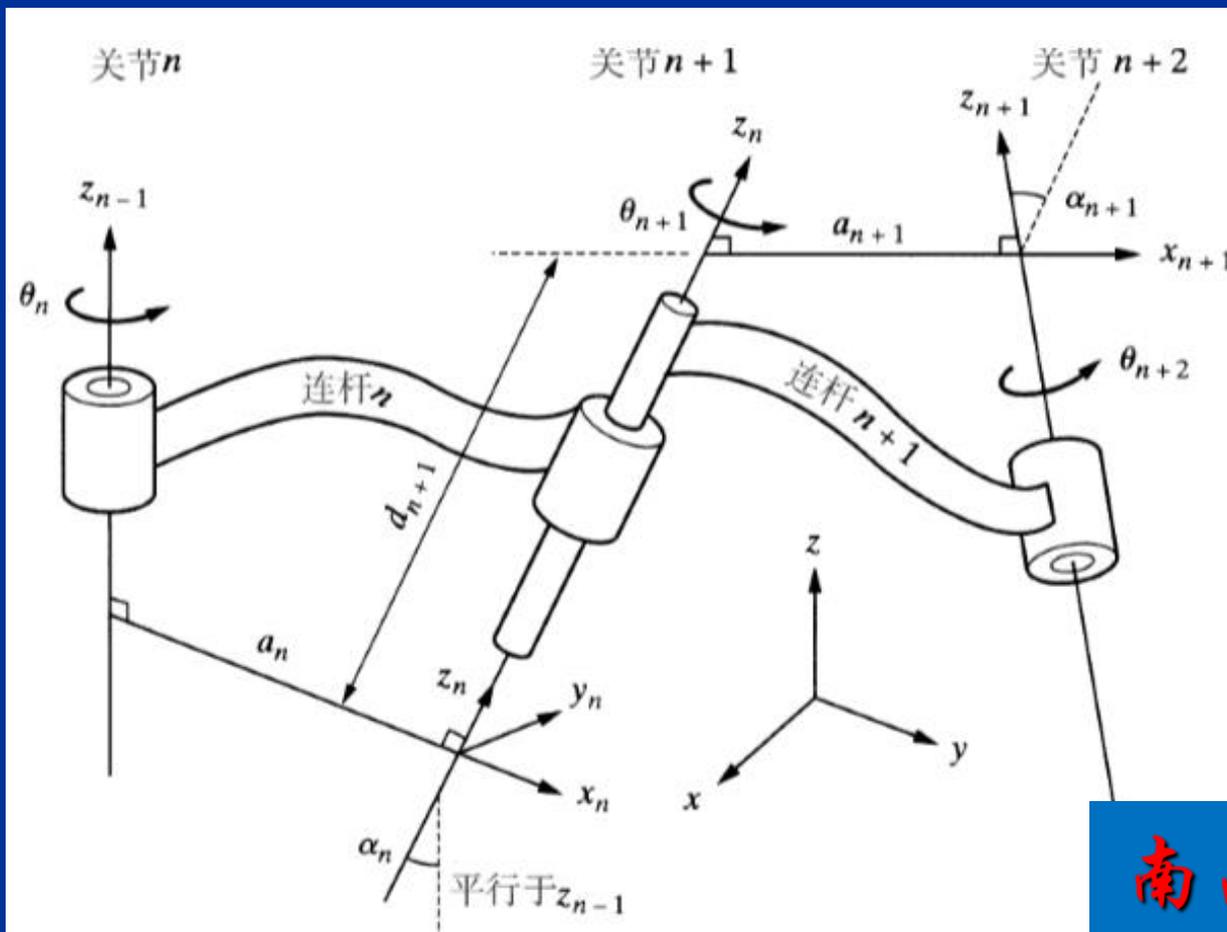
对于**旋转关节**， $\theta_i$ 是关节变量，其它三个参数固定不变；

对于**移动关节**， $d_i$ 是关节变量，其它三个参数固定不变。

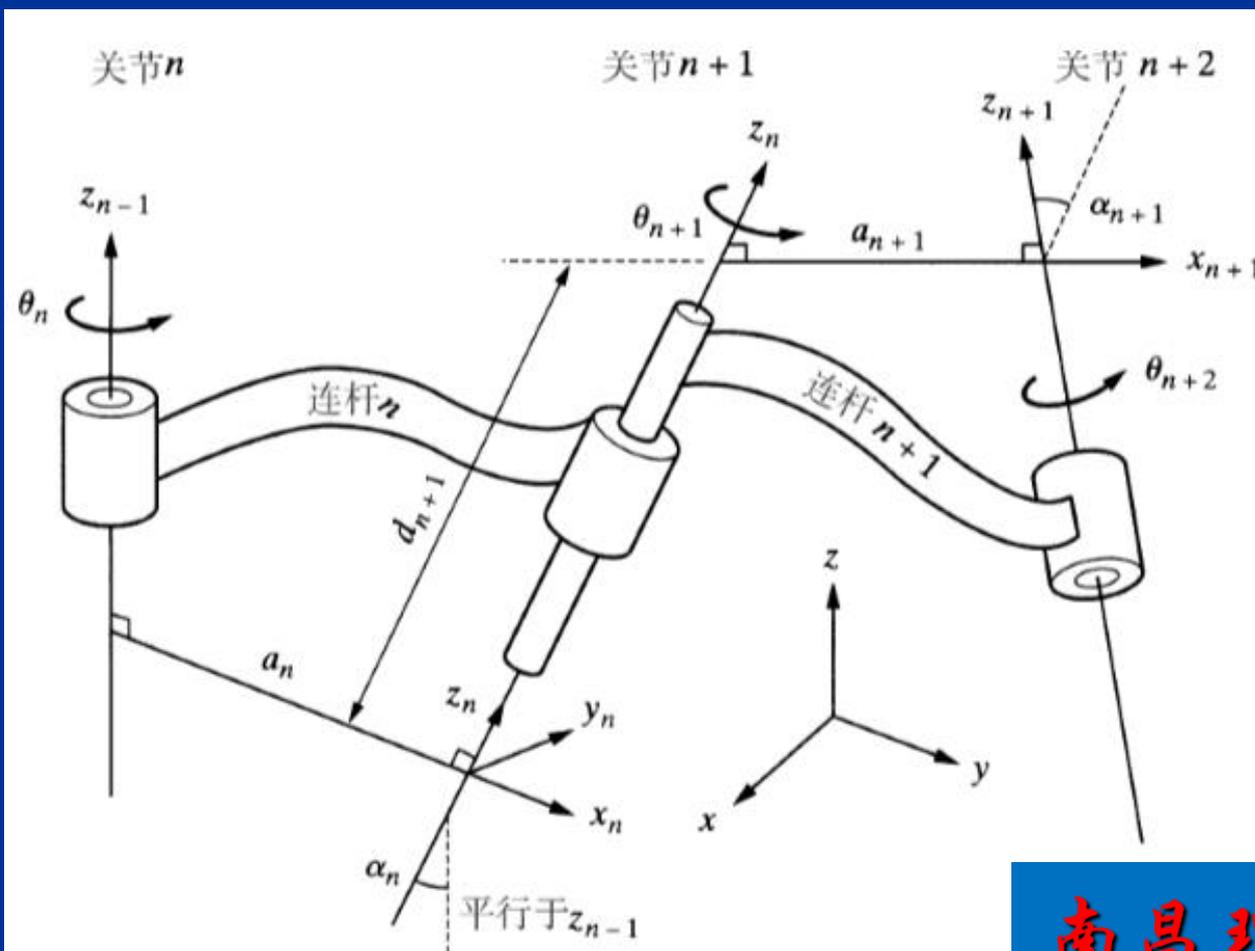
## 2、连杆坐标系

连杆坐标系的建立按下面规则进行：

- 坐标系 $\{n\}$ 的 $Z$ 轴与 $n+1$ 关节轴共线，指向任意，即表示关节数 $n+1$ 的 $Z$ 轴是 $Z_n$



- 通常关节不一定平行或相交。 $z$ 轴是斜线。定义坐标系 $\{n\}$ 的 $x$ 轴沿 $z_{n-1}$ 轴和 $z_n$ 轴之间的公垂线 $a_n$ ，指向是由关节 $n$ 到关节 $n+1$ 的方向
- 坐标系 $\{i-1\}$ 的 $y$ 轴按照右手法则规定



## 讨论:

- 如果两个关节的Z轴平行，怎么定义它们的公垂线？

为简化模型，可以挑选与前一关节的公垂线共线的一条公垂线

- 如果两个关节的Z轴是相交的，它们之间没有公垂线，怎么定义X轴？

可将垂直于两条轴线构成的平面的直线定义为X轴。  
这样也会使模型得以简化

## 知识点小结:

- 连杆长度 $a$ ，表示每一条公垂线的长度，也称为关节偏移量
- 连杆扭角 $\alpha$ ，表示两个相邻的Z轴之间的角度，也叫关节扭角
- 连杆距离 $d$ ，表示Z轴上两条相邻的公垂线之间的距离
- 连杆转角 $\theta$ ，表示绕Z轴的旋转角

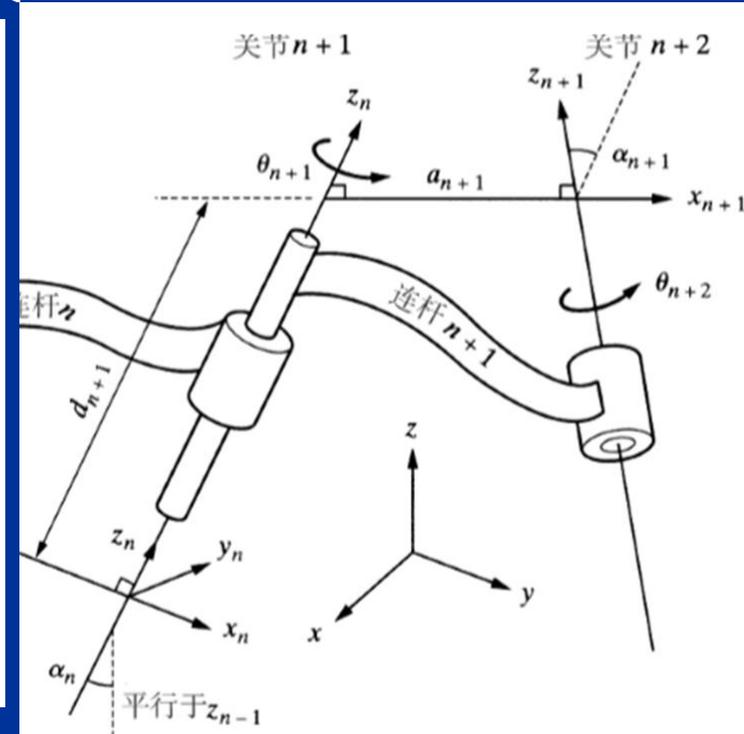
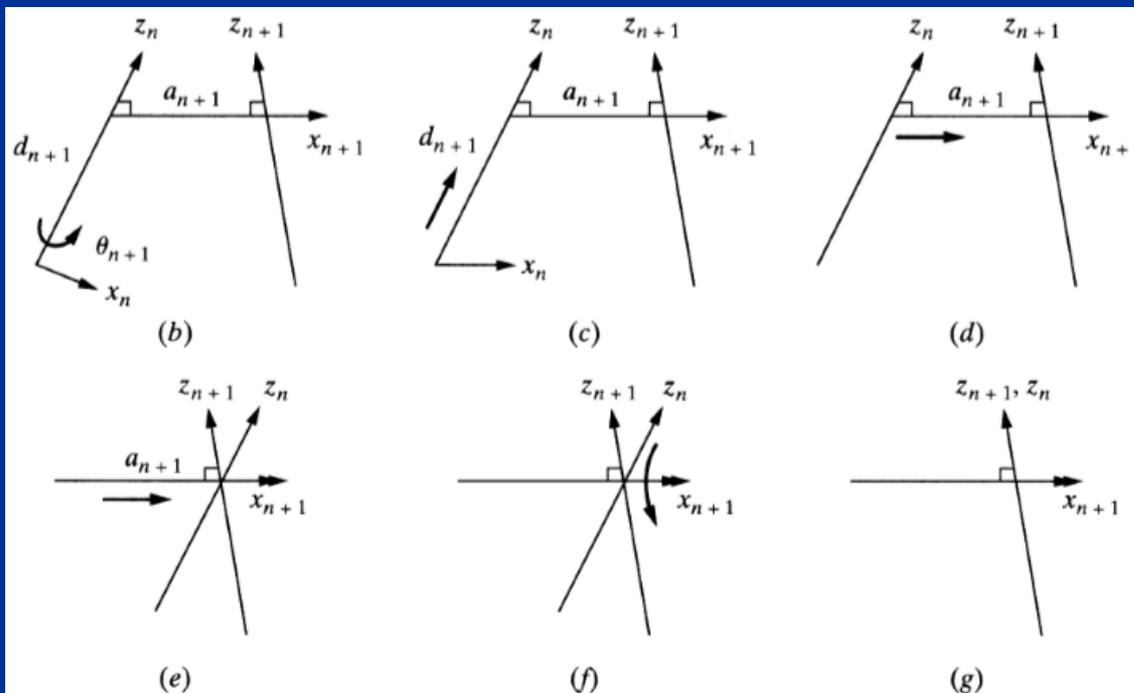
- (1)  $a_i$ 是从 $Z_{i-1}$ 到 $Z_i$ 沿 $X_i$ 测量的距离;
- (2)  $\alpha_i$ 是从 $Z_{i-1}$ 到 $Z_i$ 绕 $X_i$ 旋转的角度。
- (3)  $\theta_i$ 是从 $X_{i-1}$ 到 $X_i$ 绕 $Z_{i-1}$ 旋转的角度;
- (4)  $d_i$ 是从 $X_{i-1}$ 到 $X_i$ 沿 $Z_{i-1}$ 测量的距离;

通常，只有  
 $\theta$ 和 $d$ 是关节  
变量

## 3.6.2 连杆坐标系间变换矩阵

■ 连杆坐标系之间的相对关系可以用坐标系之间的平移和旋转来表达。坐标系 $n$ 经过以下四步变换可与坐标系 $n+1$ 相重合：

- 1) 绕 $Z_n$ 轴旋转 $\theta_{n+1}$ 角，使 $X_n$ 轴转到与 $X_{n+1}$ 同一平面内。
- 2) 沿 $Z_n$ 轴平移一距离 $d_{n+1}$ ，把 $X_n$ 移到与 $X_{n+1}$ 同一直线上。
- 3) 沿 $X_{n+1}$ 轴平移一距离 $a_{n+1}$ ，把连杆 $n$ 的坐标系移动到使其原点与连杆 $n+1$ 坐标系原点重合的地方（原点和 $X$ 轴已重合）。
- 4) 绕 $X_{n+1}$ 轴旋转 $\alpha_{n+1}$ 角，使 $Z_n$ 转到与 $Z_{n+1}$ 同一直线上。



- 用一个变换矩阵 $A_n$ 来综合表示上述四次变换，由于后一次变换都是相对动坐标系进行的，因此在运算中变换矩阵应该右乘。

$$\begin{aligned}
 {}^nT_{n+1} &= A_{n+1} = Rot(z, \theta_{n+1}) \times Tran(0, 0, d_{n+1}) \times Tran(a_{n+1}, 0, 0) \times Rot(x, \alpha_{n+1}) \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1} & 0 & 0 \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{n+1} & -S\alpha_{n+1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{n+1} & C\alpha_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_{n+1} &= \begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & S\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & a_{n+1}C\theta_{n+1} \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & -C\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & a_{n+1}S\theta_{n+1} \\ 0 & S\alpha_{n+1} & C\alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

可以用变换矩阵 $A_n$ 来衡量两个坐标系之间的相对位姿。对于一个确定的机器人，它是 $\theta_n$ 或 $d_n$ 的函数。

# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

# 机器人运动学方程

通常把描述一个连杆坐标系与下一个连杆坐标系间相对关系的齐次变换矩阵叫做A变换矩阵或A矩阵。

如果 $A_1$ 矩阵表示第一个连杆坐标系相对于固定坐标系的位姿， $A_2$ 矩阵表示第二个连杆坐标系相对于第一个连杆坐标系的位姿，那么第二个连杆坐标系在固定坐标系中的位姿可用 $A_1$ 和 $A_2$ 的乘积来表示。

$$T_2 = A_1 A_2$$

同理，若 $A_3$ 矩阵表示第三个连杆坐标系相对于第二个连杆坐标系的位姿，则有

$$T_3 = A_1 A_2 A_3$$

如此类推，对于六连杆机器人，有下列 $T_6$ 矩阵：

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

等式右边表示了从固定参考系到手部坐标系的各连杆坐标系之间的变换矩阵的连乘。结果为手部坐标系相对于固定参考系的位姿。称该式为**机器人运动学方程**。

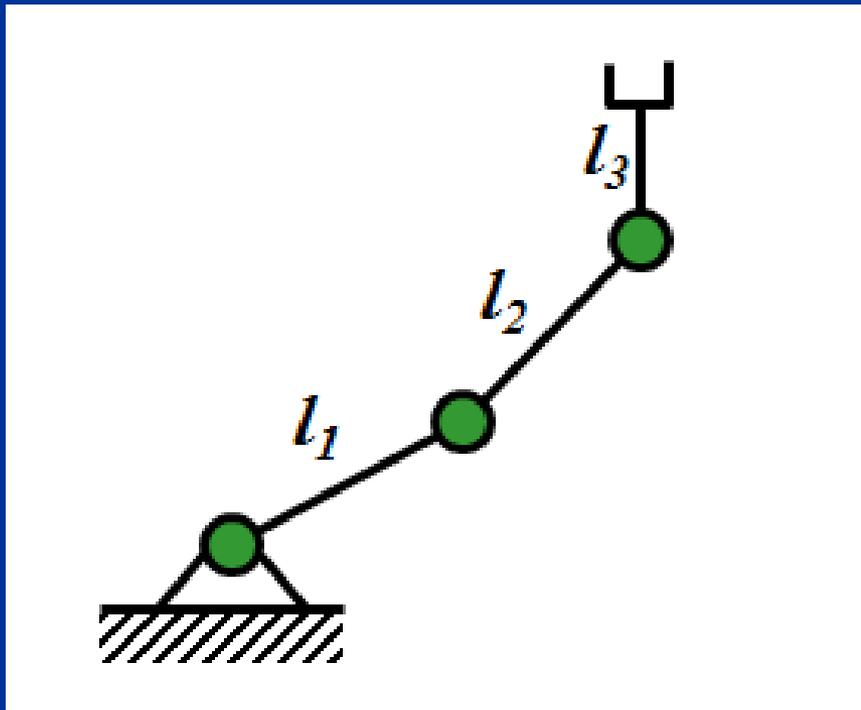
该式的计算结果 $T_6$ 是一个如下的（4×4）矩阵：

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中：前三列表示手部的姿态，第四列表示手部的位姿。

## 3.7.1 正向运动学建立步骤

例， 已知三自由度平面关节机器人如图所示， 设机器人杆件1、 2、 3的长度为 $l_1$ ，  $l_2$ ，  $l_3$ 。 建立机器人的运动学方程。



解：（1）建立坐标系

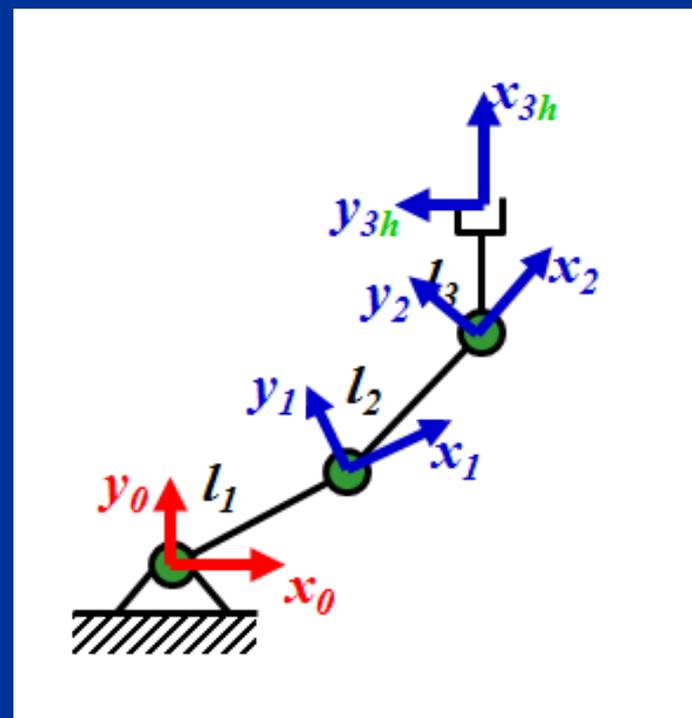
a、机座坐标系  $\{0\}$

b、杆件坐标系  $\{i\}$

c、手部坐标系  $\{h\}$ （与末端杆件坐标系  $\{n\}$  重合）

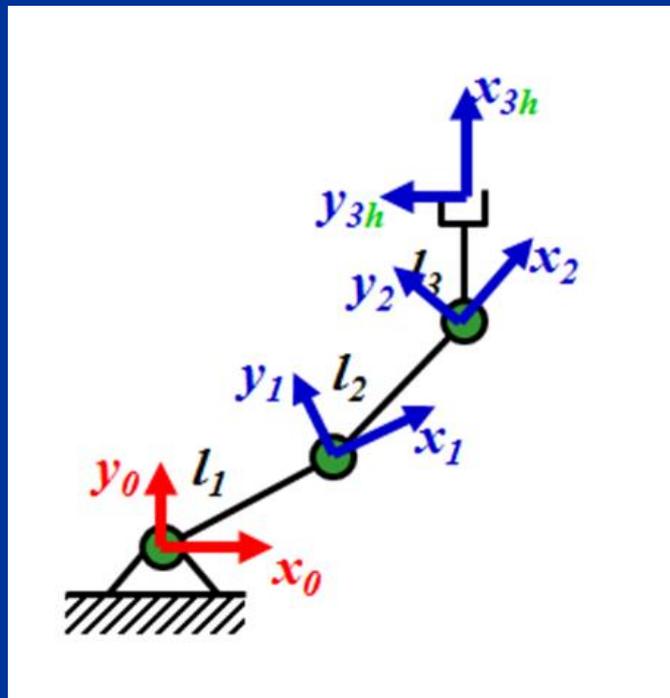
（2）确定参数

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$l_i$	$\alpha_i$
1	0	$\theta_1$	$l_1$	0
2	0	$\theta_2$	$l_2$	0
3	0	$\theta_3$	$l_3$	0



解： (3) 相邻杆件位姿矩阵

$$\begin{aligned} A_1 &= Rot(z, \theta_1) \cdot Trans(l_1, 0, 0) \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## 解：（3）相邻杆件位姿矩阵

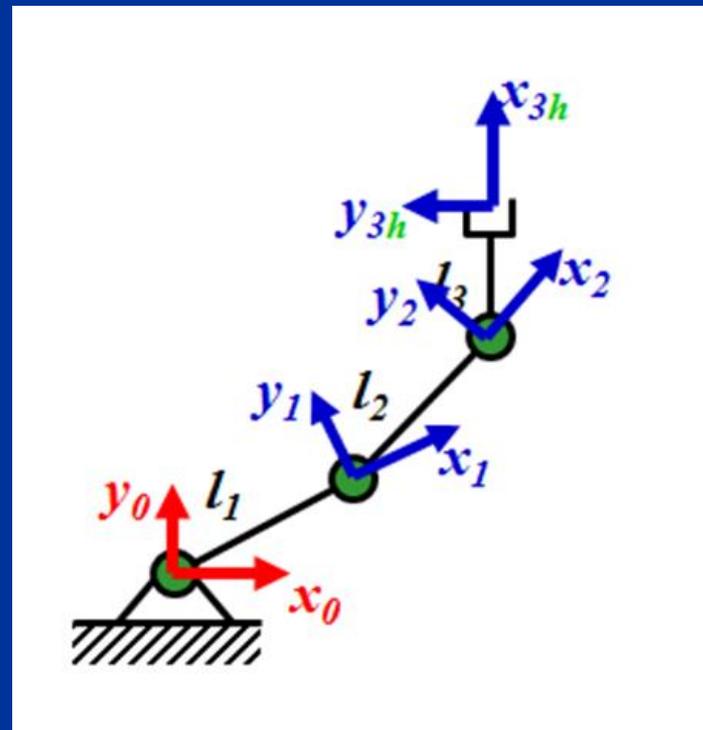
同理可得：

$$A_2 = Rot(z, \theta_2) \cdot Trans(l_2, 0, 0)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = Rot(z, \theta_3) \cdot Trans(l_3, 0, 0)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



解：（4）建立方程

将相邻杆件位姿矩阵依次相乘，则有：

$$T_{3(h)} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_{3(h)} = \begin{bmatrix} c\theta_{123} & -s\theta_{123} & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} + l_3c\theta_{123} \\ s\theta_{123} & c\theta_{123} & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12} + l_3s\theta_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中：  $c\theta_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ ,  $s\theta_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

$c\theta_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $s\theta_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

解：（4）建立方程

若用矩阵形式表示，则为：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{123} & -s\theta_{123} & \mathbf{0} & l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} + l_3c\theta_{123} \\ s\theta_{123} & c\theta_{123} & \mathbf{0} & l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12} + l_3s\theta_{123} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

解：（4）建立方程

若用方程组形式表示，则为：

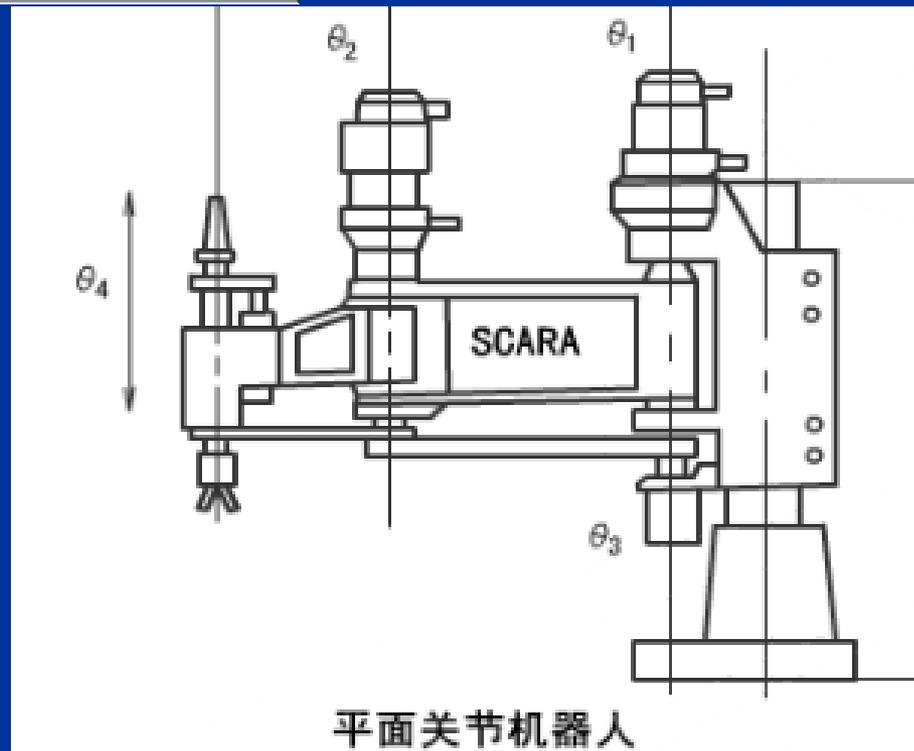
$$\begin{cases} n_x = c\theta_{123} \\ n_y = s\theta_{123} \\ o_x = -s\theta_{123} \\ o_y = c\theta_{123} \\ p_x = l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} + l_3c\theta_{123} \\ p_y = l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12} + l_3s\theta_{123} \end{cases}$$

## 3.7.2 正向运动学实例

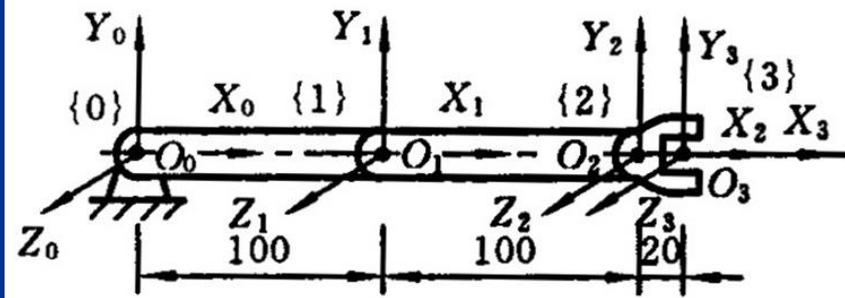
正向运动学主要解决机器人运动学方程的建立及手部位姿的求解问题，下面结合实例介绍建立运动学方程的方法。

### 例2，SCARA机器人的运动学方程

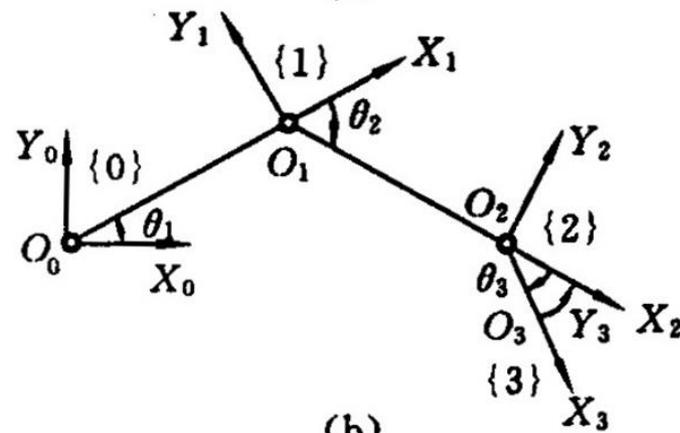
右图所示为具有一个肩关节、一个肘关节和一个腕关节的SCARA机器人。此机器人的机械结构特点是三个关节轴线是相互平行的。



固定坐标系{0}和连杆1、连杆2、连杆3的坐标系{1}、{2}、{3}分别如图所示，坐落在关节1、关节2、关节3和手部中心、各连杆参数为：



(a)



(b)

- (1)  $\theta_i$ 是从 $X_{i-1}$ 到 $X_i$ 绕 $Z_{i-1}$ 旋转的角度；
- (2)  $d_i$ 是从 $X_{i-1}$ 到 $X_i$ 沿 $Z_{i-1}$ 测量的距离；
- (3)  $a_i$ 是从 $Z_{i-1}$ 到 $Z_i$ 沿 $X_i$ 测量的距离；
- (4)  $\alpha_i$ 是从 $Z_{i-1}$ 到 $Z_i$ 绕 $X_i$ 旋转的角度。

连杆	转角（变量） $\theta$	两连杆间距离 $d$	连杆长度 $a$	连杆扭角 $\alpha$
1	$\theta_1$	0	100	0
2	$\theta_2$	0	100	0
3	$\theta_3$	0	20	0

## 该机器人的运动学方程为

$$T_3 = A_1 A_2 A_3$$

式中， $A_1$ 表示连杆1的坐标系{1}相对于固定坐标系{0}的齐次变换矩阵； $A_2$ 表示连杆2的坐标系{2}相对于连杆1坐标系{1}的齐次变换矩阵； $A_3$ 表示连杆3的坐标系即手部坐标系{3}相对于连杆2坐标系{2}的齐次变换矩阵。

于是有

$$A_1 = \text{Rot}(z_0, \theta_1) \text{Trans}(l_1, 0, 0)$$

$$A_2 = \text{Rot}(z_1, \theta_2) \text{Trans}(l_2, 0, 0)$$

$$A_3 = \text{Rot}(z_2, \theta_2) \text{Trans}(l_3, 0, 0)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，可以写出  $\mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_3c_{123} + l_2c_{12} + l_1c_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_3s_{123} + l_2s_{12} + l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

式中：  
 $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$   
 $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$   
 $c_1 = \cos\theta_1$

$s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$   
 $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$   
 $s_1 = \sin\theta_1$

$T_3$ 表示手部坐标系{3}(即手部)的位置和姿态。

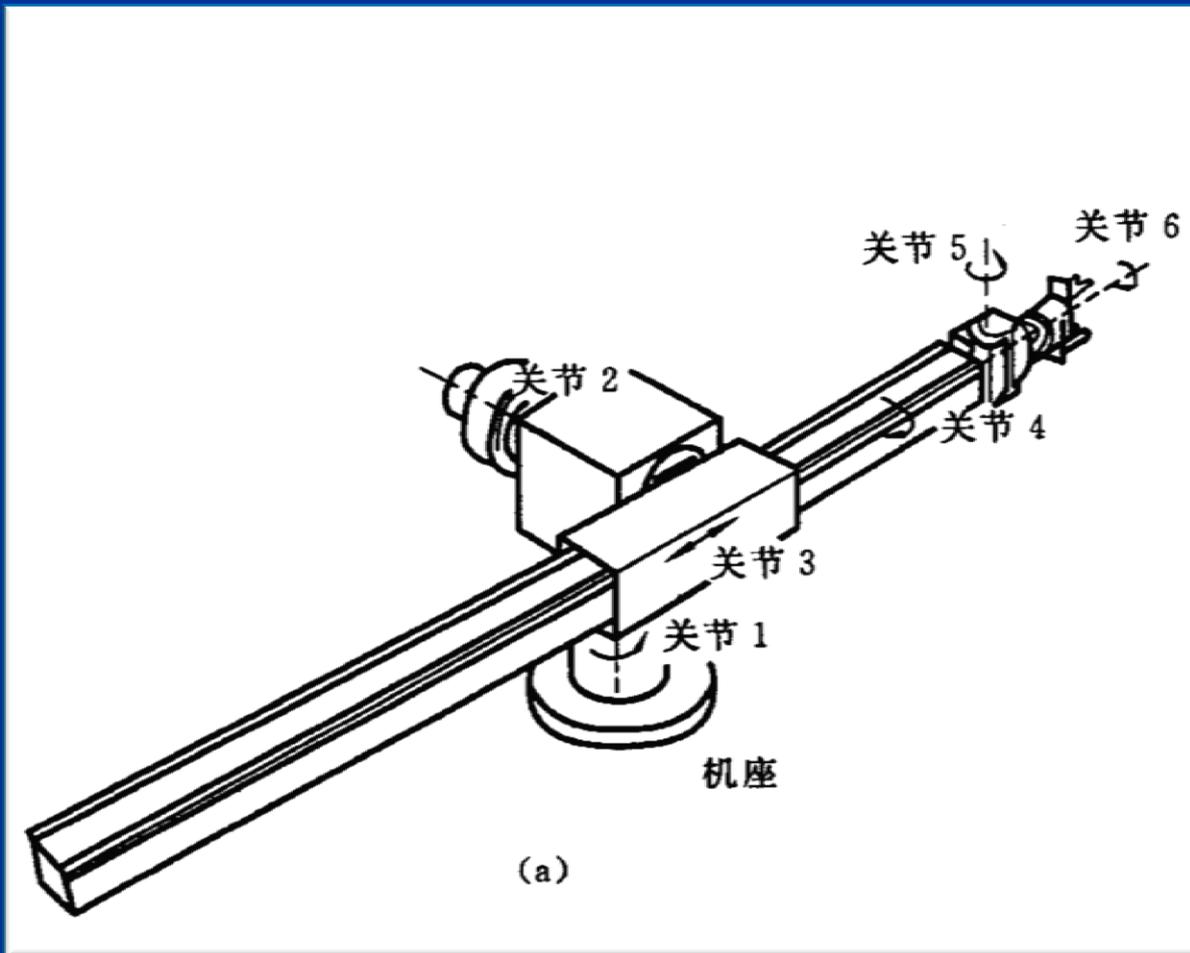
$$T_3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_3 c_{123} + l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_3 s_{123} + l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当转角变量 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、给定时，可以算出具体的数值。

设 $\theta_1=30^\circ$   $\theta_2=-60^\circ$   $\theta_3=-30^\circ$ ，则可根据平面关节型机器人运动学方程式求解出运动学正解，即手部的位姿矩阵表达式为

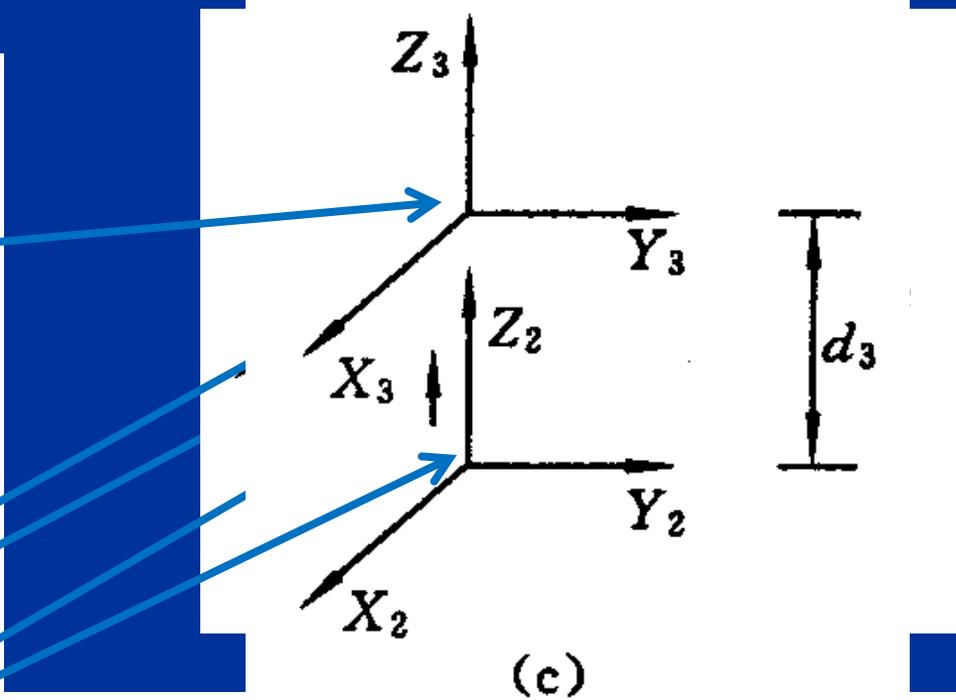
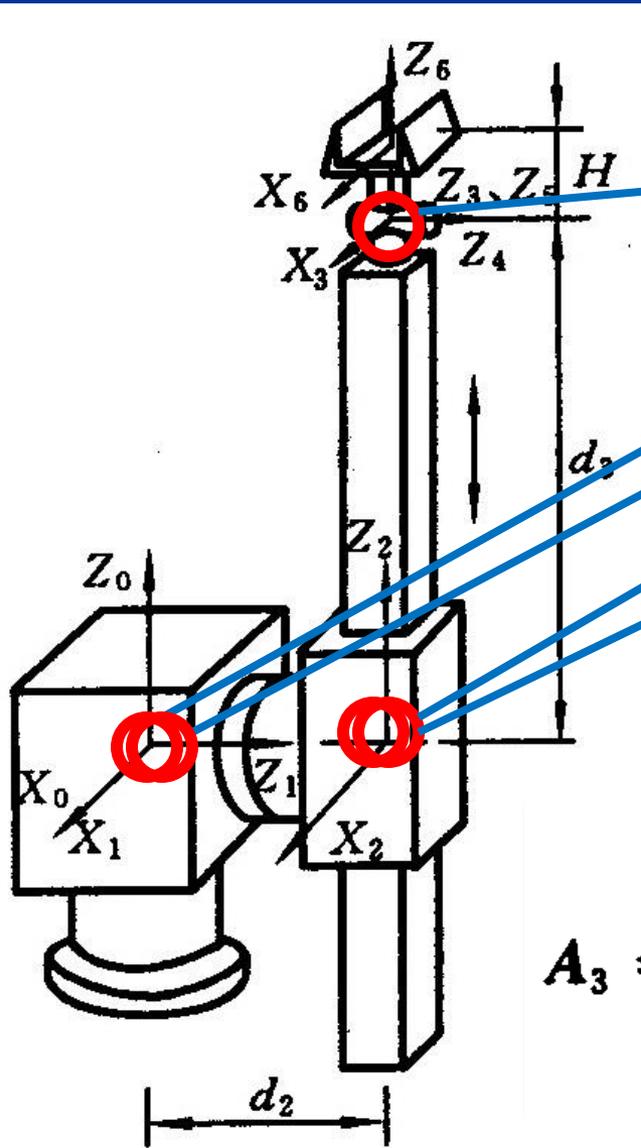
$$T_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 183.2 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & -17.32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 例3, 斯坦福机器人的运动学方程



## 斯坦福机器人各连杆的参数

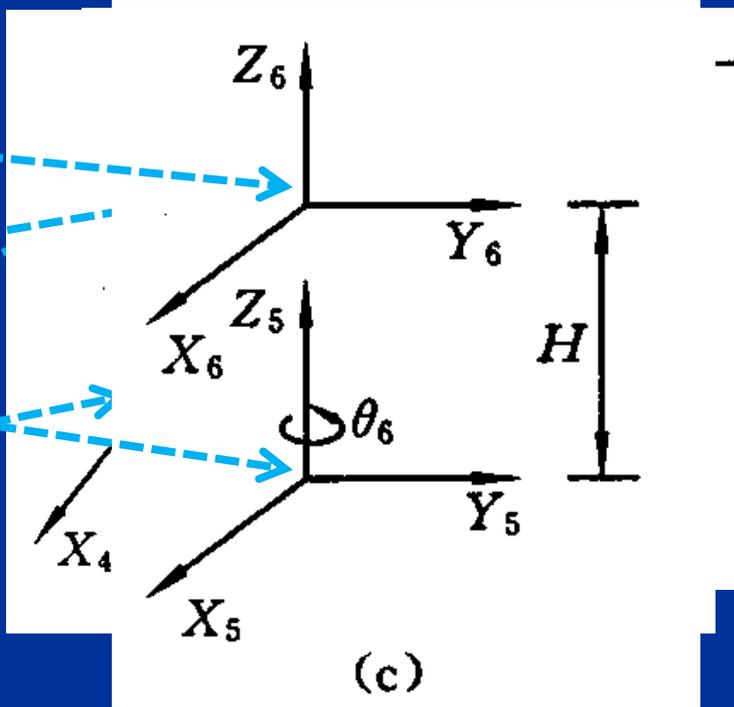
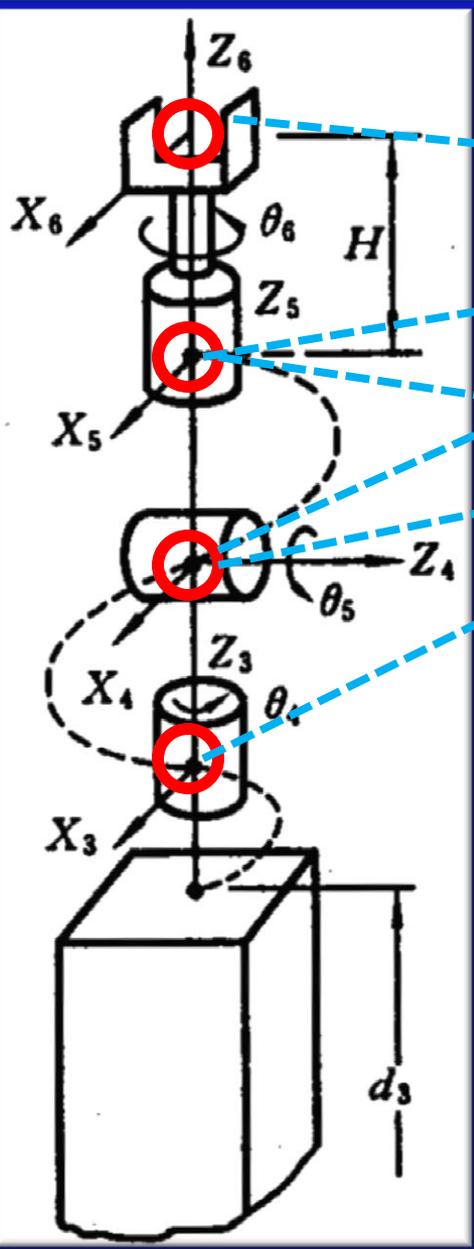
杆 号	关节转角 $\theta$	扭角 $\alpha$	杆长 $a$	距离 $d$
1	$\theta_1$	$-90^\circ$	0	0
2	$\theta_2$	$90^\circ$	0	$d_2$
3	0	$0^\circ$	0	$d_3$
4	$\theta_4$	$-90^\circ$	0	0
5	$\theta_5$	$90^\circ$	0	0
6	$\theta_6$	$0^\circ$	0	$H$



(c)

$$A_3 = \text{Trans}(0, 0, d_3) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A_6 = \text{Rot}(z_5, \theta_6) \text{Trans}(0, 0, H) = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所有杆的A矩阵已建立。如果要知道非相邻杆件间的关系，只要用相应的A矩阵连乘即可

$${}^4T_6 = A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & H s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & H c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

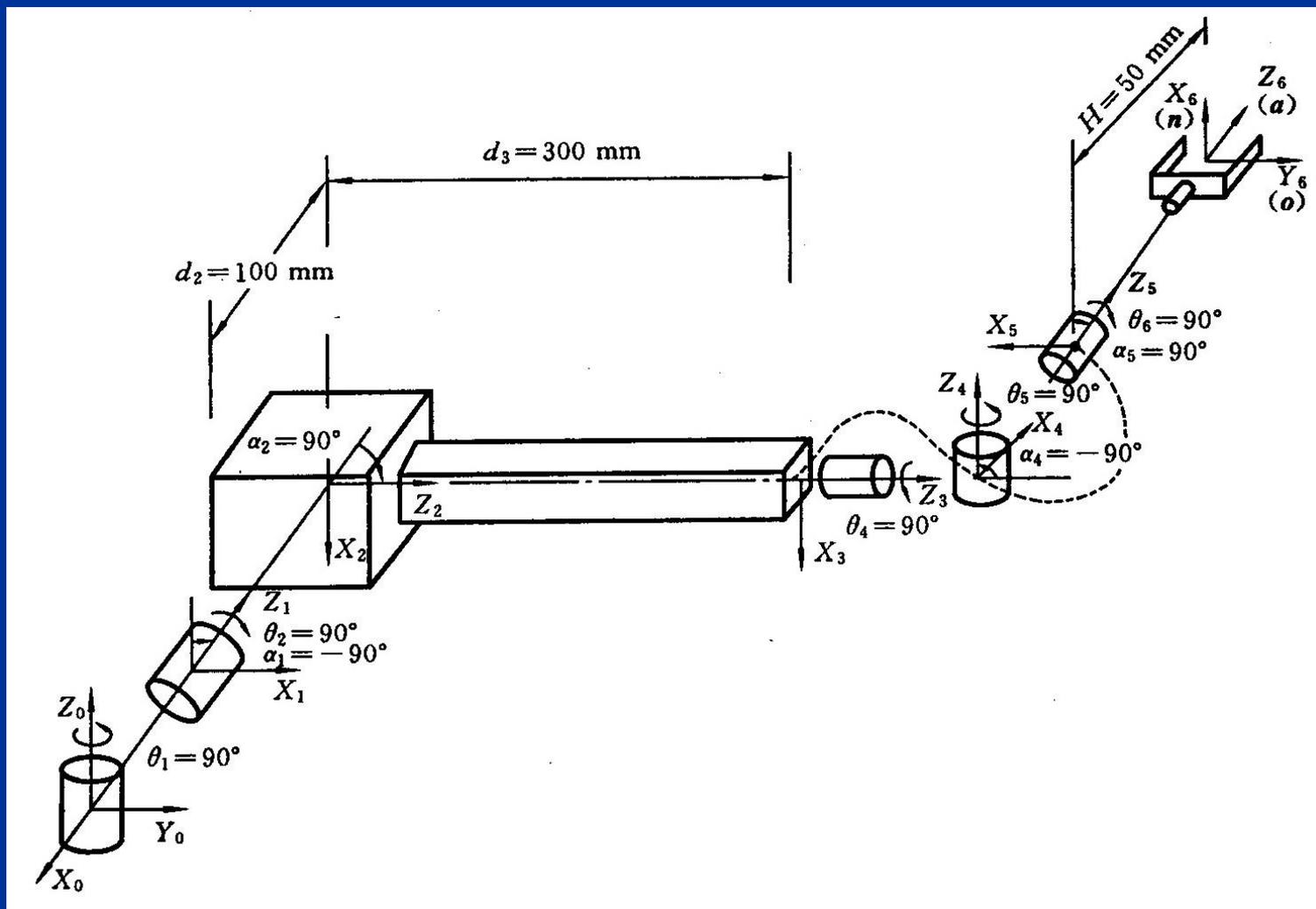
$${}^3T_6 = A_4 A_5 A_6$$

$${}^2T_6 = A_3 A_4 A_5 A_6$$

$${}^1T_6 = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

$${}^0T_6 = T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

# 斯坦福机器人的运动学方程



$$\begin{cases}
 n_x = c_1 [c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
 n_y = s_1 [c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
 n_z = -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \\
 o_x = c_1 [-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\
 o_y = s_1 [-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\
 o_z = s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \\
 a_x = c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 \\
 a_y = s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 \\
 a_z = -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \\
 p_x = c_1 [c_2c_4s_5H - s_2(c_5H - d_3)] - s_1(s_4s_5H + d_2) \\
 p_y = s_1 [c_2c_4s_5H - s_2(c_5H - d_3)] + c_1(s_4s_5H + d_2) \\
 p_z = - [s_2c_4s_5H + c_2(c_5H - d_3)]
 \end{cases}$$

假如 $H=0$ ，则 $n$ 、 $o$ 、 $a$ 三个方向矢量不变，而位置矢量的分量 $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$ 分别为

$$p_x = c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2$$

$$p_y = s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2$$

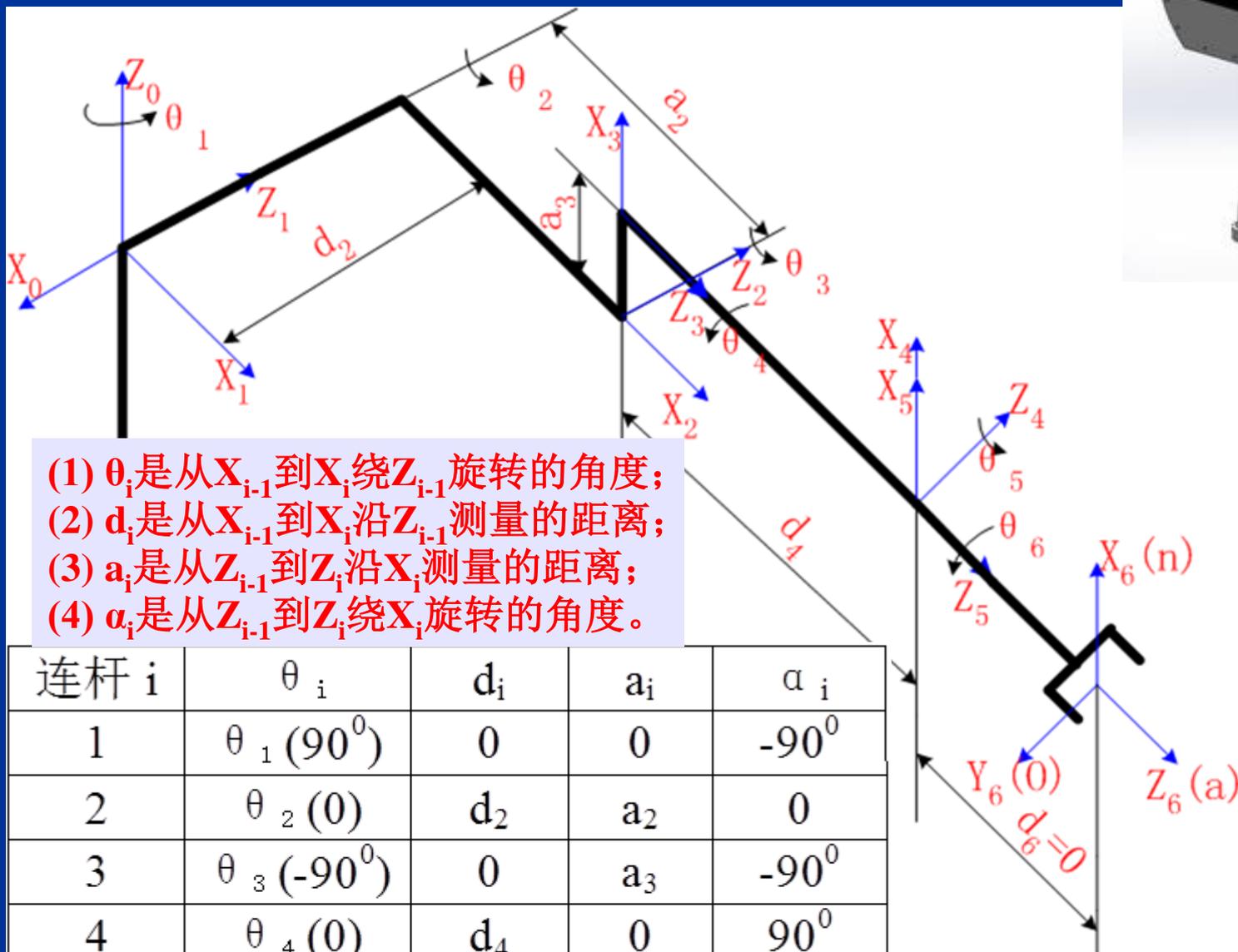
$$p_z = c_2 d_3$$

代入本例给出的已知参数值和变量值，求得数值解为

$$T_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

该 $(4 \times 4)$ 矩阵即为斯坦福机器人在题目给定情况下手部的位姿矩阵，即**运动学正解**。

# 例4, PUMA560机器人的运动学方程



- (1)  $\theta_i$  是从  $X_{i-1}$  到  $X_i$  绕  $Z_{i-1}$  旋转的角度;
- (2)  $d_i$  是从  $X_{i-1}$  到  $X_i$  沿  $Z_{i-1}$  测量的距离;
- (3)  $a_i$  是从  $Z_{i-1}$  到  $Z_i$  沿  $X_i$  测量的距离;
- (4)  $\alpha_i$  是从  $Z_{i-1}$  到  $Z_i$  绕  $X_i$  旋转的角度。

连杆 i	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1 (90^0)$	0	0	$-90^0$
2	$\theta_2 (0)$	$d_2$	$a_2$	0
3	$\theta_3 (-90^0)$	0	$a_3$	$-90^0$
4	$\theta_4 (0)$	$d_4$	0	$90^0$
5	$\theta_5 (0)$	0	0	$-90^0$
6	$\theta_6 (0)$	0	0	0

## (1) 连杆参数

连杆 i	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1 (90^0)$	0	0	$-90^0$
2	$\theta_2 (0)$	$d_2$	$a_2$	0
3	$\theta_3 (-90^0)$	0	$a_3$	$-90^0$
4	$\theta_4 (0)$	$d_4$	0	$90^0$
5	$\theta_5 (0)$	0	0	$-90^0$
6	$\theta_6 (0)$	0	0	0

## (2) A矩阵

$$A_i = Rot(z, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Trans(a_i, 0, 0) Rot(x, \alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & a_3c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & a_3s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4T = A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

运动学方程为:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 第三章 工业机器人运动学

3.1 概述

3.2 物体在空间中的位姿描述

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY角与欧拉角

3.6 机器人连杆D-H参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

前面介绍了如何建立机器人的运动学方程。对于六连杆机器人，有下列 $T_6$ 矩阵：

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

该式即为机器人运动学方程。

该式的计算结果 $T_6$ 是一个如下的（4×4）矩阵：

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中：前三列表示手部的姿态，第四列表示手部的位姿。

给定末端连杆的位姿，计算相应关节变量的过程叫做运动学逆解

例如：已知手部位姿，即已知  $(\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}, \bar{p})$ ，求关节变量  $\theta_1$ ， $\theta_2$  和  $\theta_3$ 。

正解

$${}^0_4T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(\theta_3) {}^3_4T$$

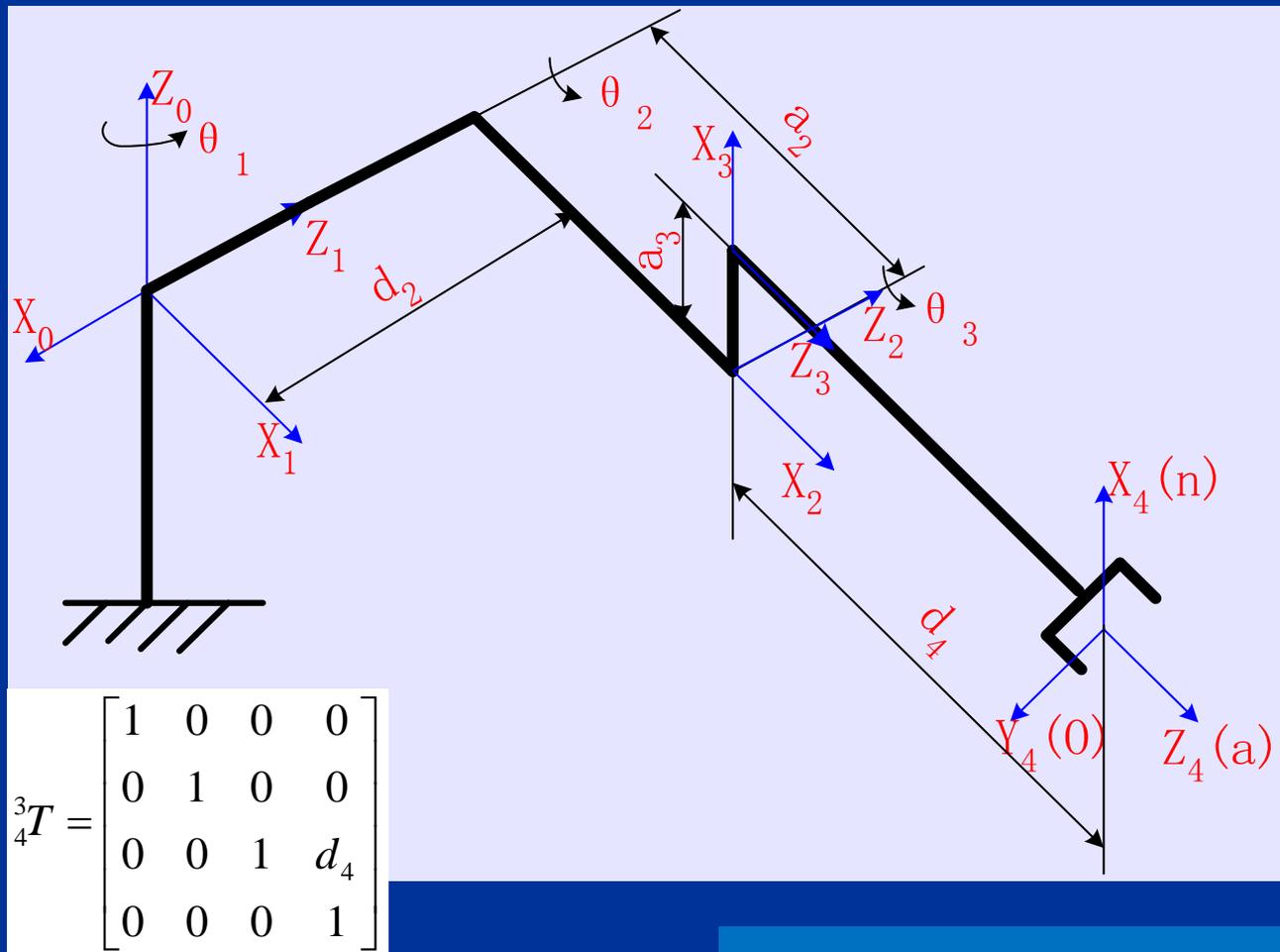
反解

用反变换法（也称代数法）求解，它是一种把关节变量分离出来从而求解的方法。

$${}^0_1T = A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & a_3c_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & a_3s_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

首先求 $\theta_1$ ，将  $\begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{o} & \vec{a} & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T_4$  等式两端左乘  ${}^0_1T^{-1}$ ，得

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_4T = \begin{bmatrix} c_{23} & 0 & -s_{23} & a_3c_{23} - d_4s_{23} + a_2c_2 \\ s_{23} & 0 & c_{23} & a_3s_{23} + d_4c_{23} + a_2s_2 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式两端矩阵的元素 (3, 4) 对应相等，得：

$$-s_1p_x + c_1p_y = d_2$$

式1

再利用三角代换： $p_x = \rho \cos \varphi$  和  $p_y = \rho \sin \varphi$ ，

式2

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \varphi = \text{Atan2}(p_y, p_x) \end{array} \right.$$

把式2代入式1得:

$$\sin(\varphi - \theta_1) = \frac{d_2}{\rho}$$



$$\cos(\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\varphi - \theta_1)} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho}\right)^2}$$



$$\varphi - \theta_1 = A \tan 2\left(\frac{d_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho}\right)^2}\right)$$



$$\theta_1 = A \tan 2(p_y, p_x) - A \tan 2\left(d_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}\right)$$

再求 $\theta_3$ 。再令矩阵方程两端的元素 (1, 4) 和 (2, 4) 分别对应相等得:

$$\begin{cases} c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \\ -p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \end{cases}$$

两边平方相加得：

$$(c_1 p_x + s_1 p_y)^2 + p_z^2 = a_2^2 c_2^2 + a_3^2 c_{23}^2 + d_4^2 s_{23}^2 + 2a_3 a_2 c_{23} c_2 - 2d_4 a_2 s_{23} c_2 \\ - 2a_3 d_4 c_{23} s_{23} + a_2^2 s_2^2 + a_3^2 s_{23}^2 + d_4^2 c_{23}^2 + 2a_3 a_2 s_{23} s_2 + 2d_4 a_2 c_{23} s_2 + 2a_3 d_4 s_{23} c_{23}$$

合并同类项并整理得：

$$2a_2 a_3 c_3 - 2a_2 d_4 s_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2 - a_3^2 - a_2^2 - d_4^2$$

令  $k = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_2^2 - d_4^2)}{2a_2}$ ，再利用三角代换可得：

$$\theta_3 = A \tan 2(a_3, d_4) - A \tan 2(k, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2})$$

式中正，负号对应着 $\theta_3$ 的两种可能解。

最后求 $\theta_2$ ：上式两端矩阵的元素（2，4）对应相等，得：

$$-p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \quad \text{展开并整理得：}$$

$$-p_z = (a_3 c_3 + a_2 - d_4 s_3) s_2 + (a_3 s_3 + d_4 c_3) c_2$$

同样再利用三角代换容易求得 $\theta_2$ 的四种可能解：

$$\theta_2 = A \tan 2(-p_z, \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - p_z^2}) - A \tan 2(k_y, k_x)$$

其中  $k_x = a_3 c_3 + a_2 - d_4 s_3$

$$k_y = (a_3 s_3 + d_4 c_3)$$

- ◆ 在已知手部要到达的目标位姿的情况下如何求出关节变量，以驱动各关节的电动机旋转，使手部的位姿得到满足，这就是**机器人反向运动学问题**，也称为求运动学逆解。
- ◆ 机器人逆运动学的求解有多种方法。但其解可能不存在、具有多重性。

例如当机器人的关节数不足6个时，无论怎样确定各关节的变量，都会存在有不能实现的位置和姿态。

另外，在关节数为6个的情况下，也存在着求不出数值解的情况（超出解空间）。

反之，当关节数为7个以上时，实现给定的位置和方向的各关节的变量不能唯一确定（在解空间内）。

## 结论:

- 1.反解的可能解有多个，但由于结构限制，例如各关节变量不能在全部 $360^\circ$  范围内运动，有些解甚至全部解都不能实现。
- 2.机器人存在多种解时，应选取其中最满意的一组解，譬如满足行程最短，功率最省，受力最好，回避障碍等要求。（实际上就是加约束条件）。

# 作业

3-1, 2, 3, 7