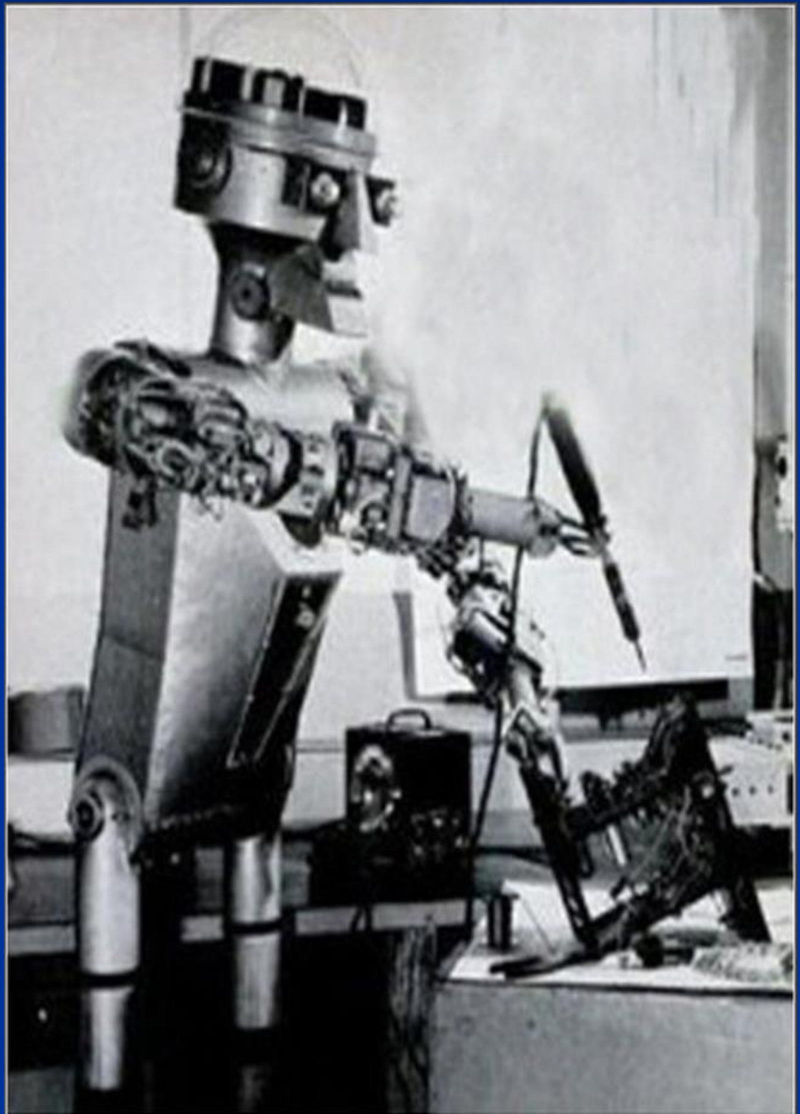
南昌理工学院

Nanchang Institute of Technology



工业机器人

机电工程学院

第四章　工业机器人静力计算及动力学分析

- 4.1 速度雅可比矩阵与速度分析
- 4.2 力雅可比矩阵与静力计算
- 4.3 工业机器人动力学分析
- 4.4 机器人动力学建模和仿真

课程引入 微分变换与雅可比矩阵

4.1.1： 雅可比矩阵

- 数学上雅可比矩阵(Jacobian Matrix)是一个多元函数的偏导矩阵。

假设有六个函数，每个函数有六个变量，即

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ \vdots \\ y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{cases}$$

将其微分，得

$$\begin{cases} dy_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_6}dx_6 \\ dy_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_6}dx_6 \\ \vdots \\ dy_6 = \dfrac{\partial f_6}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f_6}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_6}{\partial x_6}dx_6 \end{cases}$$

$$dY = \boxed{\frac{\partial F}{\partial X}}dX$$

雅可比矩阵

工业机器人速度雅可比矩阵的定义

- 把机器人关节速度向量 $\dot{q}_i$ 定义为：

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T$$

式中 $\dot{q}_i (i=1,2,\ldots,n)$ 为连杆i相对于连杆i-1的角速度或线速度

手部在基坐标系中的广义速度向量为：

$$V = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

- 关节空间速度向操作空间速度映射的线性关系称为**雅可比矩阵**，记为J，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

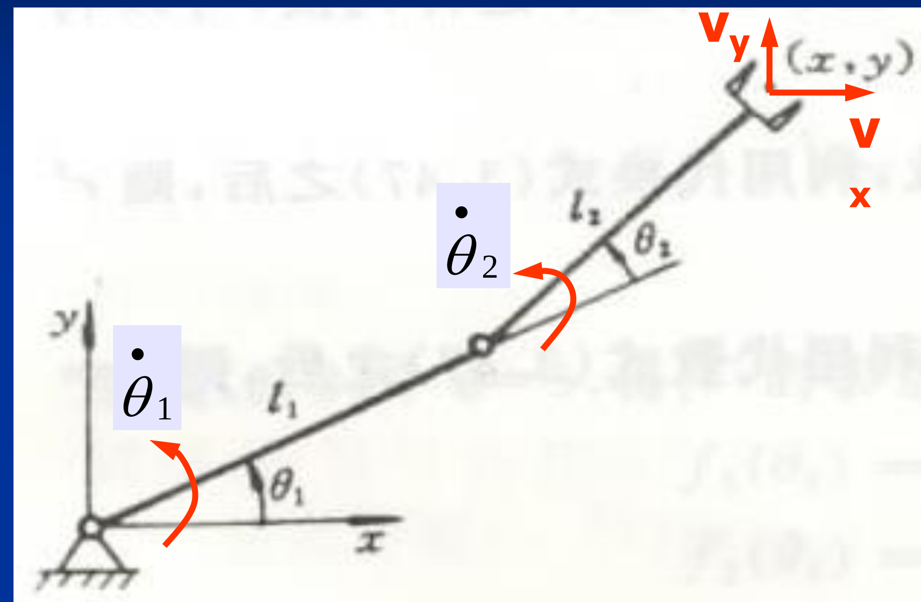
$$J = \frac{\partial P}{\partial q^t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

工业机器人速度雅可比矩阵举例

$(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$

存在怎样的关系

$(\dot{x}, \dot{y})$



两空间之间速度的线性映射关系—雅可比矩阵（简称雅可比）。它可以看成是从关节空间到操作空间运动速度的传动比，同时也可用来表示两空间之间力的传递关系。

以二自由度平面关节机器人说明速度雅可比矩阵

端点位置x、y与关节θ1、θ2的关系为：

$$\begin{cases} x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(\theta_1, \theta_2) \\ y = y(\theta_1, \theta_2) \end{cases}$$

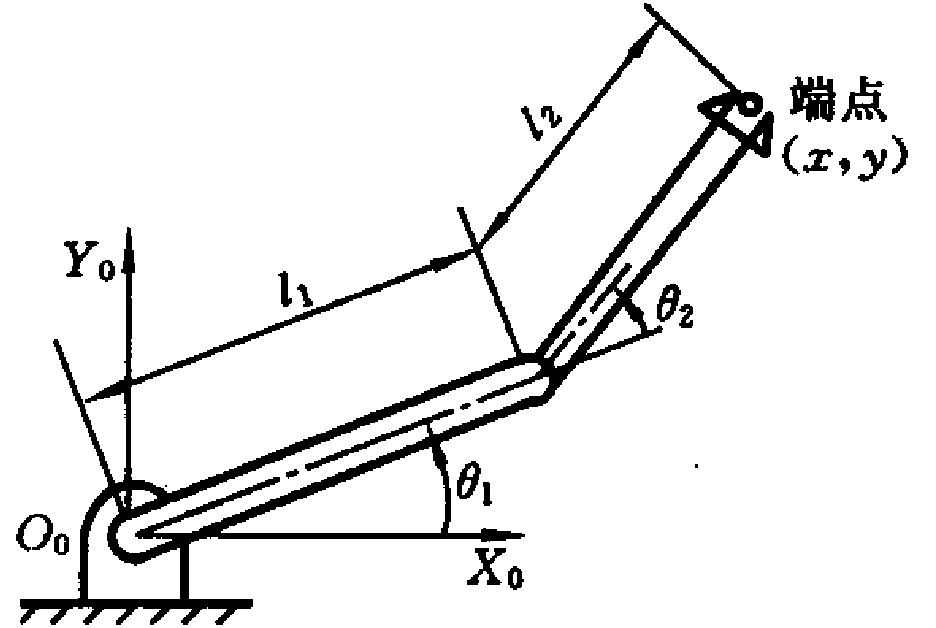


图 3-1　二自由度平面关节机器人

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} d\theta_2 \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} d\theta_2 \end{cases}$$

将其微分

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{J} d\boldsymbol{\theta}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

简写成： **dX=Jdθ**。

可以更一般的写成 $\vec{D} = J(\vec{q})d\vec{q}$ 。

式中**J就称为机械手的雅可比（Jacobian）矩阵**，它由函数**x**，**y**的偏微分组成，反映了关节微小位移**dθ**与手部微小运动**dx**之间的关系。

4.1.2 工业机器人速度分析

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}$$

对dx=Jdq两边同除以dt，得

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

式中：V为机器人末端在操作空间中的广义速度，$V=X$;

$\dot{q}$为机器人关节在关节空间中的关节速度；

$J(q)$为确定关节空间速度$\dot{q}$与操作空间速度V之间关系的雅可比矩阵。

因此机械手的雅可比矩阵定义为它的操作空间速度与关节空间速度的线性变换。$\dot{x}$（或v）称为手爪在操作空间中的广义速度，简称操作速度， 为$\dot{\theta}$关节速度。

J若是6×n的偏导数矩阵，它的第i行第j列的元素为：

$$J_{ij}(\vec{q})=\frac{\partial x_i(\vec{q})}{\partial \vec{q}_j},i=1,2,\ldots,6;\ j=1,2,\ldots,n$$

式中，x代表操作空间，q代表关节空间。

若令J_1，J_2分别为上例中雅可比矩阵的第一列矢量和第二列矢量，即

$$\dot{x} = [J_1 \quad J_2]\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{X} = J_1\dot{\theta}_1 + J_2\dot{\theta}_2$$

可以看出，雅可比矩阵的每一列表示其它关节不动而某一关节以单位速度运动产生的端点速度。

由 $J = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}$，可以看出，J阵的值随手爪位置的不同而不同，即$\theta_1$和$\theta_2$的改变会导致J的变化。

只要知道机械手的雅可比J是满秩的方阵，相应的关节速度即可求出，即 $\dot{\theta} = J^{-1}\dot{X}$ 。

上例平面2R机械手的逆雅可比

$$J^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 s_2}\begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

于是得到与末端速度 $\dot{x} = [1,0]^T$ 相应的关节速度：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dfrac{c_{12}}{l_1 s_2} \\ \dot{\theta}_2 = -\dfrac{c_1}{l_2 s_2} - \dfrac{c_{12}}{l_1 s_2} \end{cases}$$

显然，当θ_2趋于0°（或180°）时，机械手接近奇异形位，相应的关节速度将趋于无穷大。

二自由度机器人手部速度为：

$$V=\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12})\dot{\theta}_1 - l_2 s_{12}\dot{\theta}_2 \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12})\dot{\theta}_1 + l_2 c_{12}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

假如已知关节上 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 是时间的函数，$\dot{\theta}_1 = f_1(t)$, $\dot{\theta}_2 = f_2(t)$，则可求出该机器人手部在某一时刻的速度 $V=f(t)$,即手部瞬时速度。

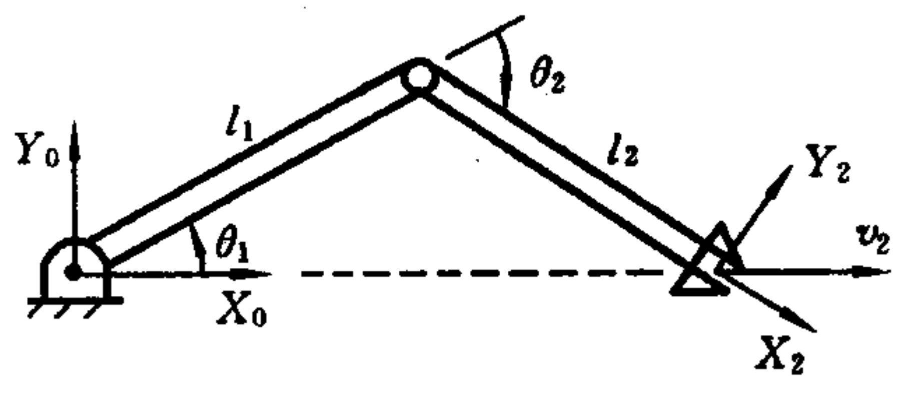
反之，假如给定机器人手部速度，可解出相应的关节速度。

$$\dot{q} = J^{-1}V$$

式中*J*-1叫称为机器人逆速度雅可比。

我们希望工业机器人手部在空间按规定的速度进行作业，那么可以计算出沿路径上每一瞬时相应的关节速度。但是，一般来说，求逆速度雅可比*J*-1是比较困难的，有时还会出现奇异解，就无法解算关节速度。

如图 3-2 所示二自由度机械手，手部沿固定坐标系 X_0 轴正向以 1.0 m/s 速度移动，杆长为 $l_1=l_2=0.5$ m。设在某瞬时 $\theta_1=30°$，$\theta_2=-60°$，求相应瞬时的关节速度。



二自由度机械手速度雅可比为：

$$J=\begin{bmatrix} -l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}$$

$$J^{-1}=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix} l_2c_{12} & l_2s_{12} \\ -l_1c_1-l_2c_{12} & -l_1s_1-l_2s_{12} \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = J^{-1}V$$

$$\dot{\theta} = J^{-1}V$$

且 v_x=1m/s, v_y=0 因此：

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

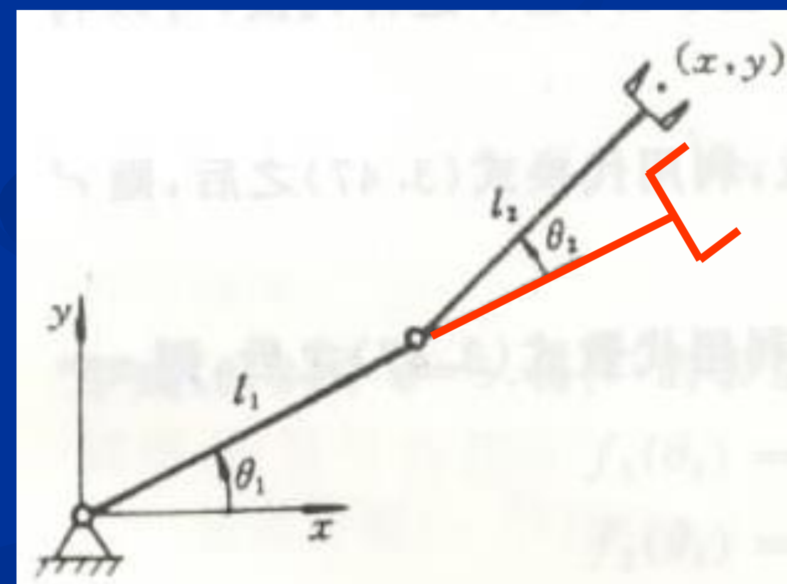
$$\dot{\theta}_1 = \frac{c_{12}}{l_1 s_2} = -\frac{1}{0.5} \text{ rad/s} = -2 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{c_1}{l_2 s_2} - \frac{c_{12}}{l_1 s_2} = 4 \text{ rad/s}$$

对于关节空间的某些形位，机械手的雅可比矩阵的秩减少，这些形位称为操作臂（机械手）的奇异形位。上例机械手雅可比矩阵的行列式为： $\det(J)=l_1 l_2 s_2$

$$J^{-1}=\frac{1}{l_1 l_2 s_2}\begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

当$\theta_2=0°$或$\theta_2=180°$时，机械手的雅可比行列式为0，矩阵的秩为1，因此处于奇异状态（该机器人二臂完全伸直，或完全折回）。在奇异形位时，机械手在操作空间的自由度将减少。



4.1.3 机器人雅可比矩阵讨论

当机器人处在奇异形位时，就会产生退化现象，丧失一个或更多的自由度。这意味着在空间某个方向(或子域)上，不管机器人关节速度怎样选择，手部也不可能实现移动。

◆工作域边界上奇异。当机器人臂全部伸展开或全部折回而使手部处于机器人工作域的边界上或边界附近时，出现逆雅可比奇异，这时机器人相应的形位叫做奇异形位。

◆工作域内部奇异。奇异并不一定发生在工作域边界上，也可以是由两个或更多个关节轴线重合所引起的。

4.1.3 机器人雅可比矩阵讨论

在机器人学中，J是一个把关节速度向量$\dot{q}_i$ 变换为手爪相对基坐标的广义速度向量的变换矩阵。

对于平面运动的机器人来说，手部的广义位置向量 $(x, y, \varphi)^T$ 均容易确定，可采用直接微分法求J。

◆ 直接微分法对三维运行的机器人则不完全适用。

J 的前三行可以直接微分求得

J的后三行一般不能直接用微分法获得。此时，可用构造法求雅可比矩阵J

雅可比矩阵的构造

雅可比矩阵J(q)既可以当成是从关节空间向操作空间的速度传递的线性关系，也可看成是微分运动转换的线性关系，即

$$V = J(q)\dot{q}$$

$$D = J(q)dq$$

微分运动与雅可比矩阵

机器人坐标系之间的微分变换

为了补偿机器人末端执行器位姿与目标物体之间的误差，以及解决两个不同坐标系之间的微位移关系问题，需要讨论机器人杆件在作微小运动时的位姿变化。

一.变换的微分

假设一变换的元素是某个变量的函数，对该变换的微分就是该变换矩阵各元素对该变量的偏导数所组成的变换矩阵乘以该变量的微分。

例如给定变换T为：

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}$$

若它的元素是变量x的函数，则T的微分为:

$$dT=\begin{bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} & \frac{\partial t_{12}}{\partial x} & \frac{\partial t_{13}}{\partial x} & \frac{\partial t_{14}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} & \frac{\partial t_{22}}{\partial x} & \frac{\partial t_{23}}{\partial x} & \frac{\partial t_{24}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} & \frac{\partial t_{32}}{\partial x} & \frac{\partial t_{33}}{\partial x} & \frac{\partial t_{34}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{41}}{\partial x} & \frac{\partial t_{42}}{\partial x} & \frac{\partial t_{43}}{\partial x} & \frac{\partial t_{44}}{\partial x} \end{bmatrix}dx$$

二. 微分运动

设机器人某一杆件相对于基坐标系的位姿为T，经过微运动后该杆件相对基坐标系的位姿变为T+dT.

（1）若这个微运动是相对于基坐标系（静系）进行的(左乘)，总可以用微小的旋转和平移来表示，即

$$T + dT = Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(\vec{k}, d\theta)T$$

所以得

$$dT = \left[Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(\vec{k}, d\theta) - I_{4\times4}\right]T$$

（2）根据齐次变换的相对性，若微运动是相对某个杆件坐标系i（动系）进行的(右乘)，则T+dT可以表示为

$$T + dT = T\,Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(\vec{k}, d\theta)$$

所以得 $$dT = T\left[Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(\vec{k}, d\theta) - I_{4\times4}\right]$$

令 $$\Delta = Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(\vec{k}, d\theta) - I_{4\times4}$$

则相对基坐标系有 $dT=\Delta_0 T$，相对动坐标系i系有 $dT=T\Delta_i$ 。这里Δ的下标不同是由于微运动相对不同坐标系进行的。

三.微分平移和微分旋转

微分平移变换与一般平移变换一样，其变换矩阵为：

$$Trans(dx,dy,dz)=\begin{bmatrix}1&0&0&dx\\0&1&0&dy\\0&0&1&dz\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由于微分旋转θ→0，所以sinθ→dθ，cosθ→1，Versθ=1-cosθ→0，将它们代入旋转变换通式中得微分旋转表达式：

$$Rot(\vec{k},d\theta)=\begin{bmatrix}1&-k_z d\theta&k_y d\theta&0\\k_z d\theta&1&-k_x d\theta&0\\-k_y d\theta&k_x d\theta&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

于是得

$$\Delta=Trans(d_x,d_y,d_z)Rot(\vec{k},d\theta)-I_{4\times 4}=\begin{bmatrix}0&-k_z d\theta&k_y d\theta&dx\\k_z d\theta&0&-k_x d\theta&dy\\-k_y d\theta&k_x d\theta&0&dz\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

四. 微分旋转的无序性

当θ→0 时，有sinθ→dθ，cosθ→1．若令$\delta x=d\theta_x$，$\delta y=d\theta_y$，$\delta z=d\theta_z$，则绕三个坐标轴的微分旋转矩阵分别为

$$Rot(x,\delta x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-\delta x&0\\0&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\delta y)=\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\0&1&0&0\\-\delta y&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rot(z,\delta z)=\begin{bmatrix}1&-\delta z&0&0\\\delta z&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

略去高阶无穷小量

$$\therefore Rot(x,\delta x)Rot(y,\delta y)=\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\\delta x\delta y&1&-\delta x&0\\-\delta y&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\0&1&-\delta x&0\\-\delta y&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\delta y)Rot(x,\delta x)=\begin{bmatrix}1&\delta x\delta y&\delta y&0\\0&1&-\delta x&0\\-\delta y&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\delta y&0\\0&1&-\delta x&0\\-\delta y&\delta x&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

两者结果相同，可见这里左乘与右乘等效。

结论：

微分旋转其结果与转动次序无关，这是与有限转动（一般旋转）的一个重要区别。

同理可得

$$Rot(x,\delta x)Rot(y,\delta y)Rot(z,\delta z)=\begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若Rot（δx，δy，δz）和Rot（δx‘，δy’，δz‘）表示两个不同的微分旋转，则两次连续转动的结果为：

$$Rot(\delta x,\delta y,\delta z)Rot(\delta x',\delta y',\delta z')=\begin{bmatrix} 1 & -(\delta z+\delta z') & \delta y+\delta y' & 0 \\ \delta z+\delta z' & 1 & -(\delta x+\delta x') & 0 \\ -(\delta y+\delta y') & \delta x+\delta x' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式表明：任意两个微分旋转的结果为绕每个轴转动的元素的代数和，即微分旋转是可加的。

由等效转轴和等效转角与 $Rot(x,\delta x)Rot(y,\delta y)Rot(z,\delta z)$ 等效，有

$$Rot(\vec{k},d\theta)=Rot(x,\delta x)Rot(y,\delta y)Rot(z,\delta z)$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & -k_z d\theta & k_y d\theta & 0 \\ k_z d\theta & 1 & -k_x d\theta & 0 \\ -k_y d\theta & k_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta z & \delta y & 0 \\ \delta z & 1 & -\delta x & 0 \\ -\delta y & \delta x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以有

$k_x d\theta=\delta x$， $k_y d\theta=\delta y$ ， $k_z d\theta=\delta z$

将它们代入Δ得

$$\Delta=\begin{bmatrix}0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此Δ可以看成由 $\vec{\delta}$ 和 $\vec{d}$ 两个矢量组成，$\vec{\delta}$ 叫微分转动矢量，$\vec{d}$ 叫微分平移矢量。分别表示为

$$\begin{cases}\vec{\delta}=\delta_x\vec{i}+\delta_y\vec{j}+\delta_z\vec{k} \\ \vec{d}=d_x\vec{i}+d_y\vec{j}+d_z\vec{k}\end{cases}$$

$\vec{\delta}$ 和 $\vec{d}$ 合称为微分运动矢量，可表示为

$$\vec{D}=(d_x,d_y,d_z,\delta_x,\delta_y,\delta_z)^T$$

五.两坐标系之间的微分关系

现在讨论i系和j系之间的微分关系。不失一般性，假定j系就是固定系（基系）0系。

$$令\ {}_i^0T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_i = \begin{bmatrix} 0 & -\delta z_i & \delta y_i & dx_i \\ \delta z_i & 0 & -\delta x_i & dy_i \\ -\delta y_i & \delta x_i & 0 & dz_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将它们代入前面的方程 $\Delta_0\, {}_i^0T = {}_i^0T\Delta_i$ $\Rightarrow$ $\Delta_i = {}_i^0T^{-1}\Delta_0\, {}_i^0T$

得

$$\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \\ \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\vec{p}\times\vec{n})_x & (\vec{p}\times\vec{n})_y & (\vec{p}\times\vec{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\vec{p}\times\vec{o})_x & (\vec{p}\times\vec{o})_y & (\vec{p}\times\vec{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\vec{p}\times\vec{a})_x & (\vec{p}\times\vec{a})_y & (\vec{p}\times\vec{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

上式简写成

$$\begin{bmatrix} \vec{d}_i \\ \vec{\delta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i^0R^T & -{}_i^0R^T S({}^0\vec{P}_{io}) \\ 0 & {}_i^0R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_0 \\ \vec{\delta}_0 \end{bmatrix}$$

其中

$${}_i^0R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

对于任何三维矢量 $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z)^T$，其反对称矩阵 $s(\vec{p})$ 定义为：

$$s(\vec{p})=\begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

相应地，任意两坐标系{A}和{B}之间广义速度的坐标变换为：

$$\begin{bmatrix} {}^B\vec{V} \\ {}^B\vec{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^B_AR & -{}^B_ARS({}^AP_{BO}) \\ 0 & {}^B_AR \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^A\vec{V} \\ {}^A\vec{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^A\vec{V} \\ {}^A\vec{\omega} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {}^A_BR & -{}^A_BRS({}^BP_{AO}) \\ 0 & {}^A_BR \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^BV \\ {}^B\omega \end{bmatrix}$$

第四章 工业机器人静力计算及动力学分析

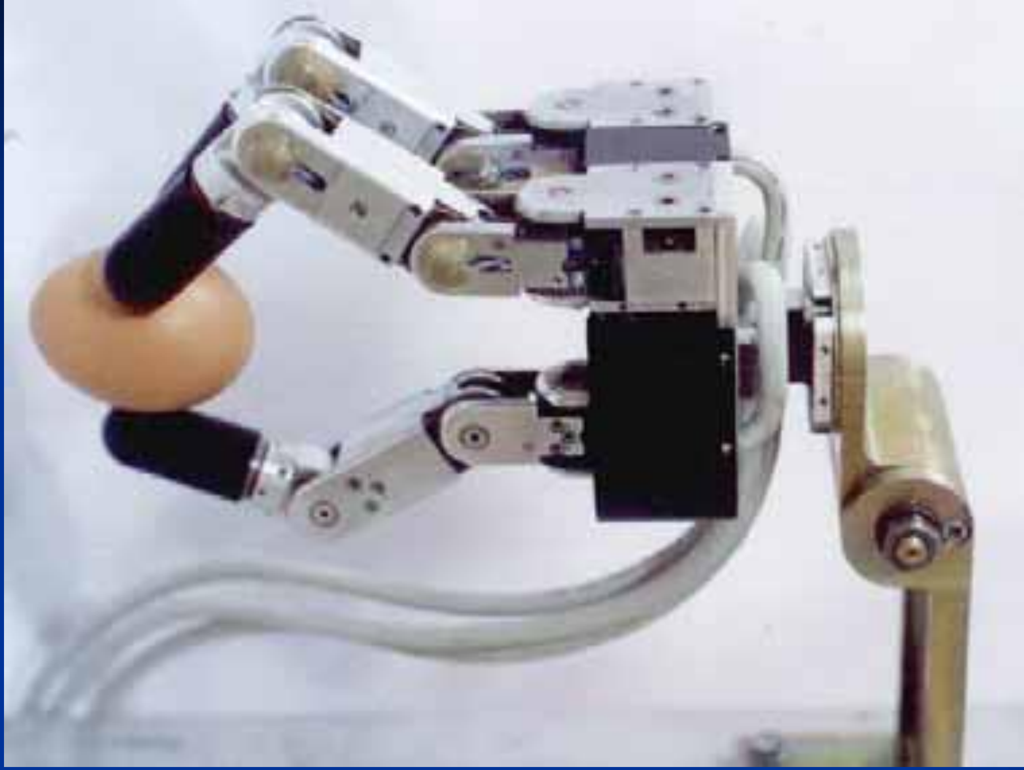
4.1 速度雅可比矩阵与速度分析

4.2 力雅可比矩阵与静力计算

4.3 工业机器人动力学分析

4.4 机器人动力学建模和仿真

4.2.1 课程引入



- 机器人与外界接触会有力和力矩的作用，如灵巧手抓取鸡蛋时；双足机器人上下楼梯时；

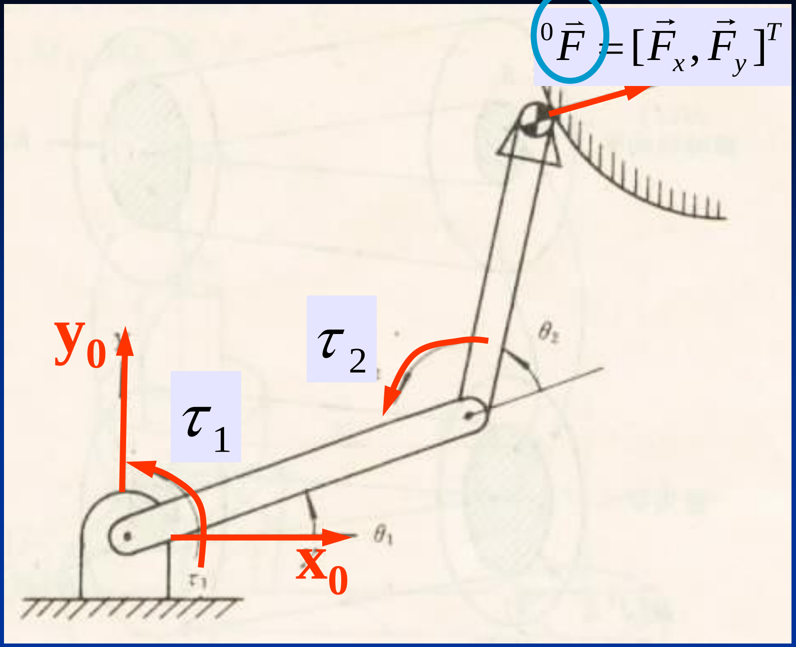
- 各关节的驱动力（广义力）与末端的作用力之间的关系？？

- 本节讨论操作臂在静止状态下力的平衡关系。
- 我们假定各关节“锁住”，机器人成为一个机构。
- 这种“锁定用”的关节力矩与手部所支持的载荷或受到外界环境作用的力取得静力平衡。
- 求解这种“锁定用”的关节力矩，或求解在已知驱动力矩作用下手部的输出力就是对机器人操作臂的静力计算。

4.2.4 机器人力雅可比矩阵

存在怎样的关系

(τ_1, τ_2) ⟷ $(\vec{f}, \vec{n})$



机器人与外界环境相互作用时，在接触的地方要产生力 和力矩，统称为末端广义（操作）力矢量。记为 $\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$

n个关节的驱动力（或力矩）组成的n维矢量

$$\vec{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n]^T$$

称为关节力矢量

利用虚功原理，令各关节的虚位移为δq_i，末端执行器相应的虚位移为D。根据虚位移原理，各关节所作的虚功之和与末端执行器所作的虚功应该相等，即

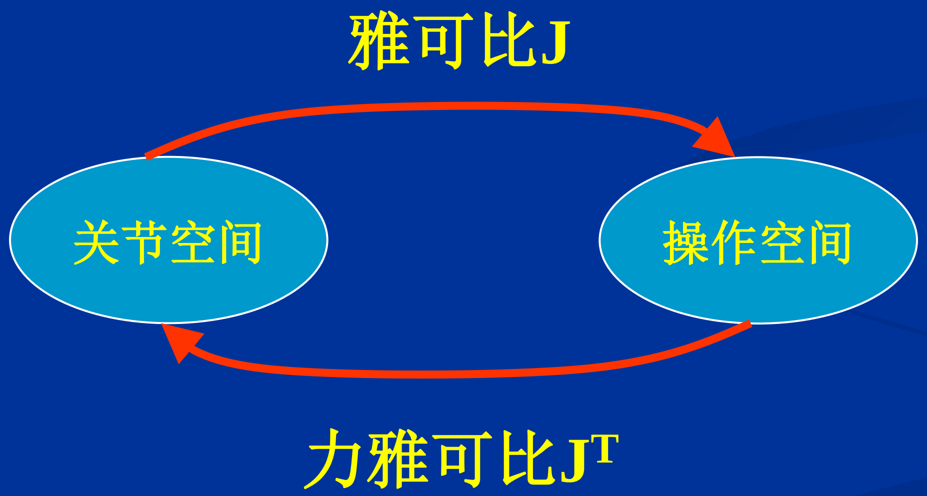
$$\vec{\tau}\delta_{\vec{q}} = \tau_1\delta_{q_1} + \tau_2\delta_{q_2} + \cdots + \tau_n\delta_{q_n} = \vec{F}^T\vec{D} = \vec{f}^T\vec{d} + \vec{n}^T\vec{\delta}$$

简写为: $\vec{\tau}^T\delta_{\vec{q}} = \vec{F}^T\vec{D}$

又因为 $\vec{D} = J(\vec{q})d\vec{q}$，所以得到 $\vec{\tau}$ 与 $\vec{F}$ 之间的关系 $\vec{\tau} = J^T(\vec{q})\vec{F}$

式中 $J^T(\vec{q})$ 称为机械手的力雅可比。它表示在静态平衡状态下，操作力向关节力映射的线性关系。

若J是关节空间向操作空间的映射（微分运动矢量），则 J^T 把操作空间的广义力矢量映射到关节空间的关节力矢量。



若已知

$$\{T\} \longleftarrow \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{T}dx \\ {}^{T}dy \\ {}^{T}dz \\ {}^{T}\delta x \\ {}^{T}\delta y \\ {}^{T}\delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\bar{p}\times\bar{n})_x & (\bar{p}\times\bar{n})_y & (\bar{p}\times\bar{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\bar{p}\times\bar{o})_x & (\bar{p}\times\bar{o})_y & (\bar{p}\times\bar{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\bar{p}\times\bar{a})_x & (\bar{p}\times\bar{a})_y & (\bar{p}\times\bar{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

则有

$$\{0\} \longleftarrow \{T\}$$

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 & 0 & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (\bar{p}\times\bar{n})_x & (\bar{p}\times\bar{o})_x & (\bar{p}\times\bar{a})_x & n_x & o_x & a_x \\ (\bar{p}\times\bar{n})_y & (\bar{p}\times\bar{o})_y & (\bar{p}\times\bar{a})_y & n_y & o_y & a_y \\ (\bar{p}\times\bar{n})_z & (\bar{p}\times\bar{o})_z & (\bar{p}\times\bar{a})_z & n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{T}f_x \\ {}^{T}f_y \\ {}^{T}f_z \\ {}^{T}n_x \\ {}^{T}n_y \\ {}^{T}n_z \end{bmatrix}$$

根据前面导出的两坐标系{A}和{B}之间广义速度的坐标变换关系，可以导出{A}和{B}之间广义操作力的坐标变换关系。

{B} $\longleftarrow$ {A}

$$\begin{bmatrix} {}^{B}\vec{f} \\ {}^{B}\vec{n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & 0 \\ S({}^{B}P_{AO})\,{}^{B}_{A}R & {}^{B}_{A}R \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} {}^{A}\vec{f} \\ {}^{A}\vec{n} \end{bmatrix}$$

{A} $\longleftarrow$ {B}

$$\begin{bmatrix} {}^{A}\vec{V} \\ {}^{A}\vec{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & -{}^{A}_{B}RS({}^{B}P_{AO}) \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} {}^{B}V \\ {}^{B}\omega \end{bmatrix}$$

4.2.3 机器人静力计算

例 :如图3-18所示的平面2R机械手，手爪端点与外界接触，手爪作用于外界环境的力为 ${}^0\vec{F}=(F_x,F_y)^T\ ({}^T\vec{F}=(f_x,f_y)^T)$，若关节无摩擦力存在，求力 ${}^0\vec{F}$ 的等效关节力矩 $\vec{\tau}=(\tau_1,\tau_2)^T$ 。

解： 由前面的推导知

$$
{}^0J=\begin{bmatrix} -l_1s_1-l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1+l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}
$$

所以得：

$$
\vec{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}={}^0J^T\,{}^0\vec{F}
$$

$$
=\begin{bmatrix} -l_1s_1-l_1s_{12} & l_2c_1+l_2c_{12} \\ -l_2s_{12} & l_2c_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_x\\ F_y\end{bmatrix}
$$

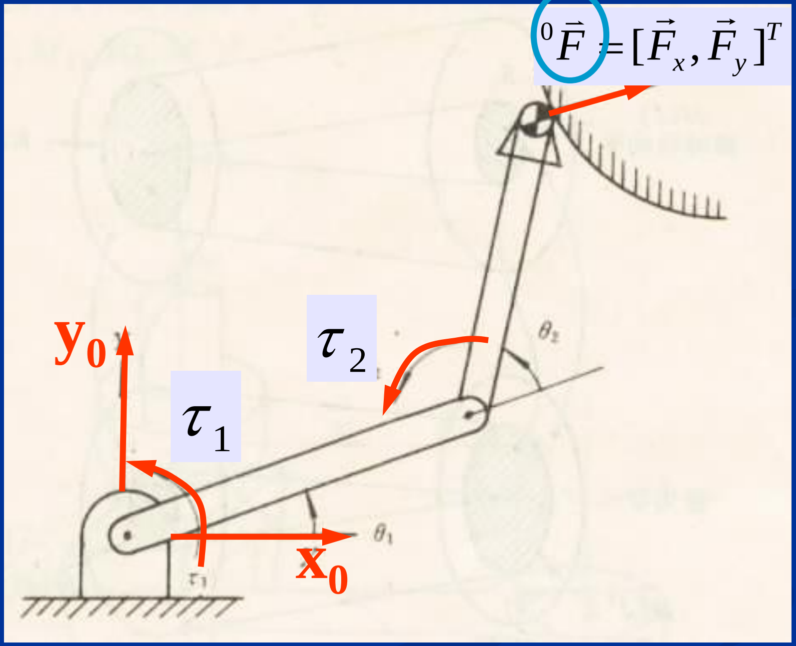


图3-18 关节力和操作力关系

4.2.4 工业机器人静力学基础总结

机器人三大矩阵

1、齐次坐标变换矩阵T：反映了两个空间位置之间的映射关系

$$X = TX_b$$

2、速度雅可比矩阵J：两个空间速度之间的映射关系

$$V = J(q)\dot{q}$$

3、力雅可比矩阵J^T：两个空间受力之间的映射关系

$$\tau = J^T F$$

第四章　工业机器人静力计算及动力学分析

4.1 速度雅可比矩阵与速度分析

4.2 力雅可比矩阵与静力计算

4.3 工业机器人动力学分析

4.4 机器人动力学建模和仿真

机器人是一个复杂的动力学系统，第三章只对机器人的静态位置进行了讨论分析，没有涉及力、速度、加速度等动态过程

为了对机器人进行控制、优化设计和仿真，需要研究机器人受力和运动之间的关系。

机器人动力学问题主要解决**动力学正问题和逆问题**

动力学正问题：根据各关节的驱动力（或力矩），求解机器人的运动，主要用于机器人的仿真

动力学逆问题：已知机器人的运动参数，求解所需要的关节力（或力矩），主要用于机器人的实时控制

工业机器人 → 重载、高速、高精度、智能化 → 对工业机器人设计和控制都提出了新的要求

在控制方面，机器人的动态实时控制是机器人发展的必然要求。需要对机器人的动力学进行分析。

机器人是一个非线性的复杂的动力学系统。动力学问题的求解比较困难，而且需要较长的运算时间。

因此，简化解的过程，最大限度地减少工业机器人动力学在线计算的时间，已是一个受到关注的研究课题。

动力学研究物体的运动和作用力之间的关系。

机器人动力学问题有两类。

（1）给出已知的轨迹点上的 $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ ，即机器人关节位置、速度和加速度，求相应的关节力矩向量τ。这对实现机器人动态控制是相当有用的。

（2）已知关节驱动力矩，求机器人系统相应的各瞬时的运动。也就是说，给出关节力矩向量τ，求机器人所产生的运动 $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ 。这对模拟机器人的运动是非常有用的。

分析方法

分析研究机器人动力学特性的方法很多，有拉格朗日(Lagrange)方法，牛顿一欧拉(Newton—Euler)方法，高斯(Gauss)方法，凯恩(Kane)方法等。

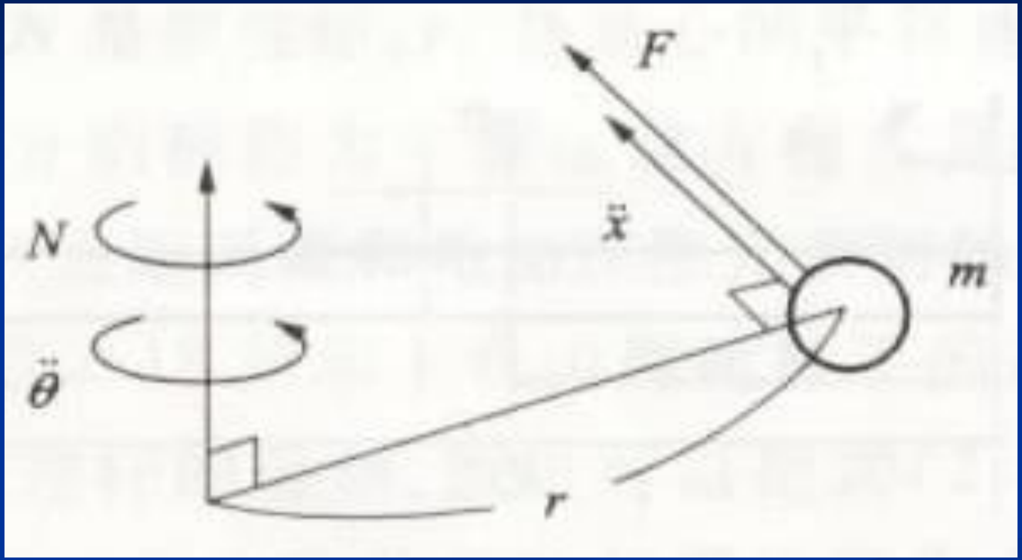
拉格朗日方法不仅能以最简单的形式求得非常复杂的系统动力学方程，而且具有显式结构，物理意义比较明确，对理解机器人动力学比较方便。

4.3.1 课程引入

一、 转动惯量

根据牛顿第二定律

$$F = m\ddot{x}$$



平移作为回转运动来分析

若把这一运动看成是杆长为r，集中质量在末端为m的杆件绕z轴的回转运动，则得到加速度和力的关系式为

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$ 和 $$F = \frac{N}{r}$$

式中，$\ddot{\theta}$和N是绕z轴回转的角加速度和转矩。

将它们代入前面的方程，得：

$$mr^2\ddot{\theta} = N$$

令 $I = mr^2$ ，则有：

$$I\ddot{\theta} = N$$

上式为质点绕固定轴回转时的运动方程式。I相当于平移运动时的质量，称为**转动惯量** 。

二、 Newton-Euler递推动力学方程

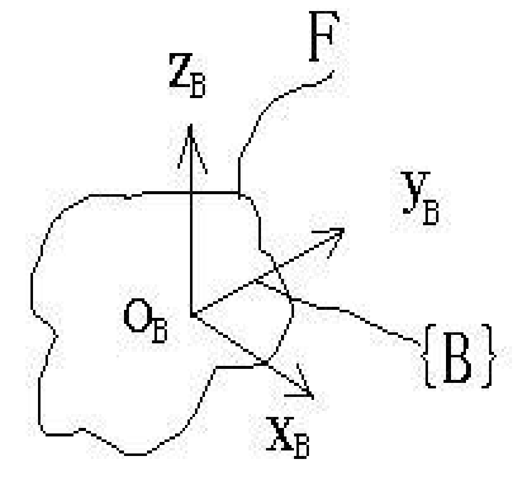
如果将机械手的连杆看成刚体，它的质心加速度$\dot{v}_c$、总质量m与产生这一加速度的作用力f之间的关系满足牛顿第二运动定律：

$$f = m\dot{v}_c$$

当刚体绕过质心的轴线旋转时，角速度ω，角加速度$\dot{\omega}$，惯性张量${}^cI$与作用力矩n之间满足欧拉方程：

$$n = {}^cI\dot{\omega} + \omega \times ({}^cI\omega)$$

三、惯性张量



令｛c｝是以刚体的质心c为原点规定的一个坐标系，相对于该坐标系｛c｝，惯性张量${}^{c}I$定义为3 × 3的对称矩阵：

$$
{}^{c}I=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}
$$

式中，对角线元素是刚体绕三坐标轴x，y，z的质量惯性矩，即I_{xx}，I_{yy}，I_{zz}，其余元素为惯性积。

惯性张量表示刚体质量分布的特征。其值与选取的参考坐标系有关，若选取的坐标系使惯性积都为零，相应的质量惯性矩为主惯性矩。

4.3.2 拉格朗日方程

1、拉格朗日函数

拉格朗日函数L的定义是一个机械系统的动能E_k和势能E_p之差，即

$$L = E_k - E_p$$

令q_i (i=1, 2，…, n) 是使系统具有完全确定位置的广义关节变量，$\dot{q}_i$ 是相应的广义关节速度。

2、拉格朗日方程

系统的拉格朗日方程为

$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

式中：F_i称为关节广义驱动力。如果是移动关节，则F_i为驱动力；如果是转动关节，则F_i为驱动力矩。

3、用拉格朗日法建立机器人动力学方程的步骤

(1) 选取坐标系，选定完全而且独立的广义关节变量q_i，i=1, 2，…，n。

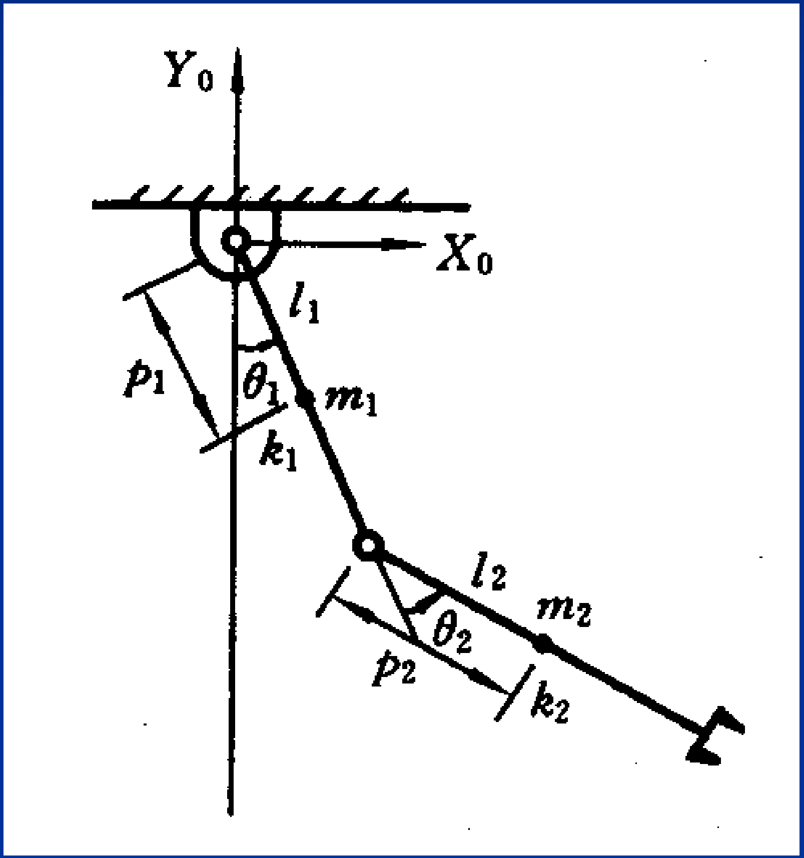
(2) 选定相应的关节上的广义力F_i，当q_i是位移变量时，则F_i为力；当q_i是角度变量时，则F_i为力矩。

(3) 求出机器人各构件的动能和势能，构造拉格朗日函数。

(4) 代入拉格朗日方程求得机器人系统的动力学方程。

4.3.3 平面关节机器人动力学分析

1、广义关节变量及广义力的选定



杆1质心k_1的位置坐标为：

$$x_1 = p_1 s_1$$

$$y_1 = -p_1 c_1$$

杆1质心k1的速度平方为：

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (p_1\dot{\theta}_1)^2$$

杆2质心k2的位置坐标为：

$$x_2 = l_1 s_1 + p_2 s_{12}$$
$$y_2 = -l_1 c_1 - p_2 c_{12}$$

杆2质心k2的速度平方为：

$$\dot{x}_2 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + p_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 s_1 \dot{\theta}_1 + p_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + p_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$+ 2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2$$

2、系统动能

$$E_k = \sum E_{ki}, \quad i = 1, 2$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 p_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$+ m_2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2$$

3、系统势能

$$E_p = \sum E_{pi}, \qquad i = 1,2$$

$$E_{p1} = m_1 g p_1 (1 - c_1)$$

$$E_{p2} = m_2 g l_1 (1 - c_1) + m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$

4、拉格朗日函数

$$L = E_k - E_p$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 p_1^2 + m_2 l_1^2)\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - (m_1 p_1 + m_2 l_1) g (1 - c_1)$$

$$- m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$

5、系统动力学方程

根据拉格朗日方程：

$$F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

关节1上的力矩τ_1计算：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 p_1^2 + m_2 l_1^2)\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 p_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\mathrm{c}_2 + m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 p_1 + m_2 l_1) g \mathrm{s}_1 - m_2 g p_2 \mathrm{s}_{12}$$

$$\tau_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$= (m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1^2 + 2 m_2 l_1 p_2 \mathrm{c}_2)\ddot{\theta}_1$$

$$+ (m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 \mathrm{c}_2)\ddot{\theta}_2 + (-2 m_2 l_1 p_2 \mathrm{s}_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$+ (-m_2 l_1 p_2 \mathrm{s}_2)\dot{\theta}_2^2 + (m_1 p_1 + m_2 l_1) g \mathrm{s}_1 + m_2 p_2 g \mathrm{s}_{12}$$

$$\boxed{\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_1}$$

$$\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 p_2 g s_{12} \end{cases}$$

关节2上的力矩τ_2计算：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 p_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 p_2 \dot{\theta}_1 c_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 p_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)s_2 - m_2 g p_2 s_{12}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ &= (m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2)\ddot{\theta}_1 + m_2 p_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ &\quad + (-m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &\quad + (m_2 l_1 p_2 s_2)\dot{\theta}_1^2 + m_2 g p_2 s_{12}\end{aligned}$$

$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_2$$

$$\begin{cases} D_{21} = m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^2 \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 = 0 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}$$

写成矩阵有：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

惯性力　　向心力　　哥式力　　重力

进行分析可知以下几点：

(1)含有$\ddot{\theta}_1$ 或$\ddot{\theta}_2$ 的项表示由于加速度引起的关节力矩项，其中：

- 含有D11和D22的项分别表示由于关节1加速度和关节2加速度引起的惯性力矩项；
- 含有D12的项表示关节2的加速度对关节1的耦合惯性力矩项；
- 含有D21的项表示关节1的加速度对关节2的耦合惯性力矩项。

(2)含有$\dot{\theta}_1$ 或 $\dot{\theta}_2$的项表示由于向心力引起的关节力矩项，其中：

- 含有D122的项表示关节2速度引起的向心力对关节1的耦合力矩项；
- 含有D211的项表示关节1速度引起的向心力对关节2的耦合力矩项。

(3)含有$\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$的项表示由于哥氏力引起的关节力矩项，其中：

- 含有D112的项表示哥氏力对关节1的耦合力矩项；
- 含有D212的项表示哥氏力对关节2的耦合力矩项。

(4)只含关节变量 θ_1, θ_2 的项表示由于重力引起的关节力矩项，其中：

- 含有D1的项表示连杆1、连杆2的质量对关节1引起的重力矩项；
- 含有D2的项表示连杆2的质量对关节2引起的重力矩项。

通常有以下几种简化问题的方法:

（1）当杆件质量不很大，重量很轻时，动力学方程中的重力矩项可以省略。

（2）当关节速度不很大，机器人不是高速机器人时，含有 $\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ 等项可以省略。

（3）当关节加速度不很大，也就是关节电机的升降速不是很突然时，那么含 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 的项有可能给予省略。当然，关节加速度的减少，会引起速度升降的时间增加，延长了机器人作业循环的时间。

4.3.4 关节空间和操作空间动力学

关节空间和操作空间的概念

n个自由度机器人中，n维关节矢量q构成关节空间；

机器人末端操作器的位姿是在直角坐标空间中描述的，称这个空间为操作空间

1、关节空间动力学

在关节空间中描述关节力矩与关节变量、速度、加速度之间的关系

2、操作空间动力学

在操作空间中用末端操作器位姿的矢量X表示机器人动力学方程

第四章　工业机器人静力计算及动力学分析

4.1 速度雅可比矩阵与速度分析

4.2 力雅可比矩阵与静力计算

4.3 工业机器人动力学分析

4.4 机器人动力学建模和仿真

1、以论文为例进行说明

题目：工业机器人动力学建模及联合仿真

主要研究内容

以HT001型6自由度工业机器人为研究对象，用**SolidWorks**建立机器人三维模型，采用牛顿-欧拉法对研究对象的动力学模型进行推导，利用**Matlab**进行理论计算，并用**Adams**仿真软件对动力学理论分析结果进行验证。

用这三个软件建立机械臂仿真，既可以对机械臂运动学及动力学进行仿真分析，又可以有效地提高机械臂的性能，为实际物理样机的结构设计和控制研究提供技术依据

1、建立三维仿真模型

在**SolidWorks**软件中按照设计图纸绘制各零件模型，然后按照机器人的装配关系对各零件进行装配。

图1　HT001型工业机器人三维模型图

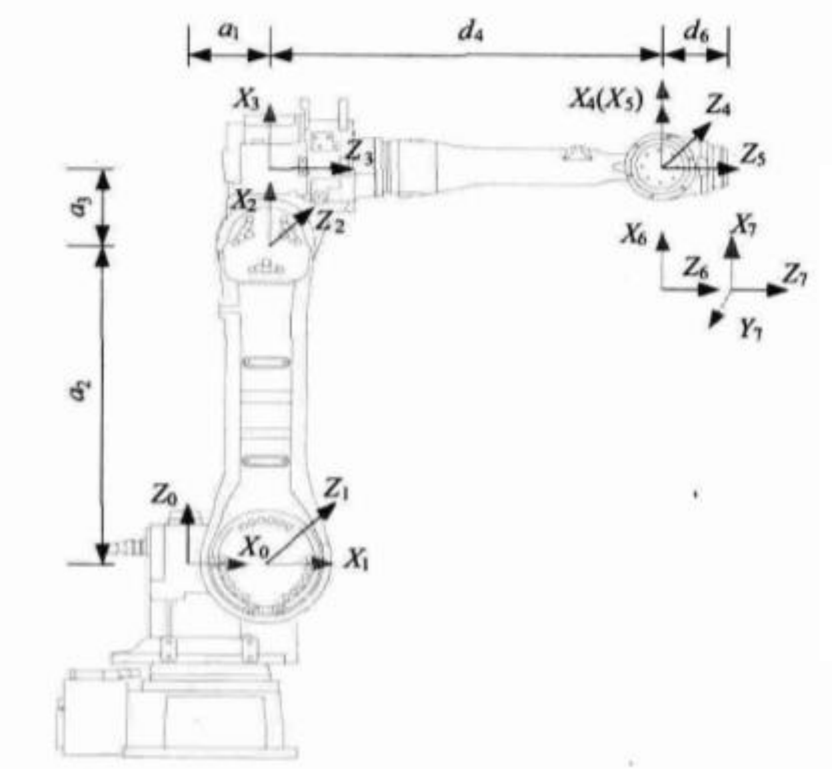


图2 HT001型工业机器人D-H连杆坐标系示意图

表1 HT001型工业机器人D-H参数表

关节	a_i	α_i	d_i	θ_i	关节变量
1	a_1	-90	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	-90	θ_2
3	a_3	-90	0	0	θ_3
4	0	90	d4	0	θ_4
5	0	-90	0	0	θ_5
6	0	0	0	0	θ_6

2、建立坐标系

机器人有六个旋转关节，关节间的轴线相互垂直或平行，根据其结构特点，利用D-H参数法建立连杆坐标系，并得到连杆坐标系对应的D-H参数。

3、建立运动学仿真系统

将SolidWorks中建立的三维模型导入到ADAMS中。并对ADAMS中的模型定义约束和驱动

图3　HT001型工业机器人ADAMS仿真模型

5、对工业机器人进行动力学分析

已知条件

1）机器人各关节的角位移；

2）机器人末端受到的力f和力矩n；

3）各连杆质心在各自关节坐标系下的位置；

4）质心坐标系与各自对应的关节坐标系一致，质心坐标系所描述的惯性张量；

5）考虑重力的影响；

6）基座固定，$w_0 = \dot{w}_0 = 0$。

用Matlab软件进行编程计算

求解连杆作用力/力矩及关节驱动力矩

1、对每个连杆应用牛顿--欧拉方程，从连杆1到连杆n向外迭代计算出连杆的质心惯性力和惯性力矩

2、从连杆n到连杆1向内迭代计算连杆间的相互作用力和力矩

5、在ADAMS环境下进行动力学仿真

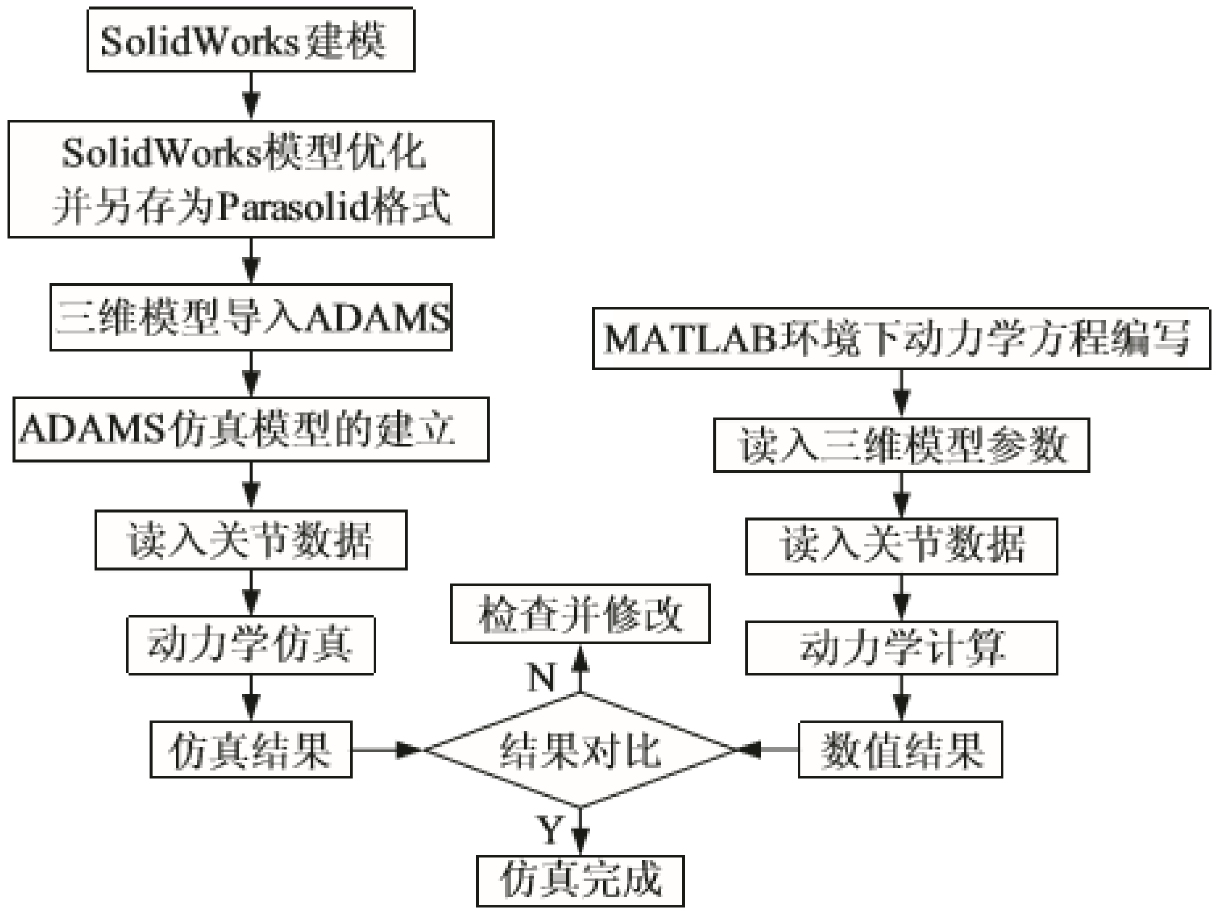


图6　HT001型工业机器人仿真流程图

Matlab数值仿真和ADAMS虚拟样机仿真得到的结果进行对比分析验证理论推导的正确性和三维仿真建模的合理性

2、以华中科技大学硕士论文为例进行说明

题目：工业机器人动力学仿真及有限元分析

主要研究内容

以一台六自由度弧焊机器人作为研究对象，对其运动学和动力学进行了系统的研究，同时对机器人的关键部件进行了有限元分析。

本文的主要内容如下：

第一章

弧焊机器人研发的背景和意义，阐述了目前机器人刚体动力学的研究特点、柔性机器人动力学研究现状与发展以及有限元分析方法在机器人中的应用。

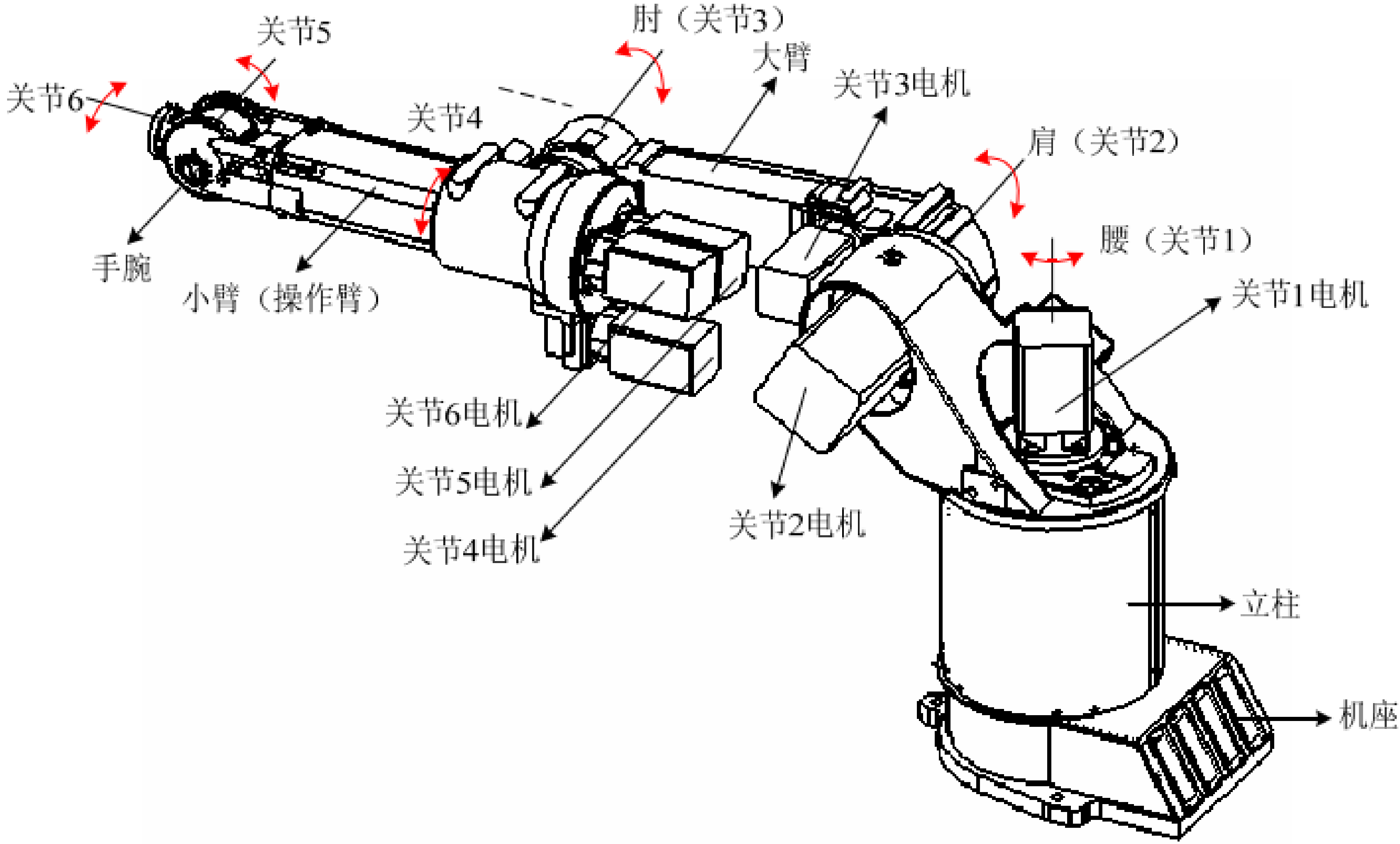


图 2.1 焊接机器人的机械结构

本文的主要内容如下：

第二章

应用 D-H 方法，建立了机器人的连杆坐标系，推导机器人的运动学方程，针对运动学逆问题的求解，编制逆解求解程序，程序中提取了最优逆解，保证了逆解的唯一性，同时求解了机器人的雅可比矩阵，为末端执行器的运动分析提供了基础。

第三章

完成机器人的静力学分析，采用牛顿-欧拉算法编制了机器人动力学的MATLAB 计算程序，为机器人的动力学仿真奠定了基础。

本文的主要内容如下：

第四章

利用 Robotic Toolbox 实现了机器人的运动学图形仿真，对第二章推导的运动学正反解方程进行了验证，结果证明推导的机器人运动学正问题和运动学逆问题的正确性；采用关节空间的轨迹规划方法，在 MATLAB/SIMULINK 平台下，建立了基于关节空间轨迹规划的动力学仿真模型，通过仿真得到了各关节的驱动力矩特性曲线，为机器人的设计和电机的选择提供了参考。

本文的主要内容如下：

第五章

用有限元分析软件 ANSYS，对机器人的关键承载部件，进行了静力学分析和模态分析，得到了各部件的局部刚度、变形、应力分布及振动频率情况，为结构设计及优化奠定了基础。

第六章

对全文进行总结，对当前机器人动力学研究的不足进行了分析，提出了机器人的刚柔耦合动力学仿真方案，并对建立集机器人运动学仿真、动力学仿真，结构设计及优化于一体的的综合结构优化平台做出了展望。

作业

4-1， 4