机器人学 讲义

<table>
<tr><td>授课时间</td><td>第 6 周 第 6 节</td><td>课次</td><td>2</td></tr>
<tr><td>授课方式
（请打√）</td><td>理论课☑ 讨论课☐ 实验课☐ 习题课☐
其他☐</td><td>课时
安排</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="4">授课题目（教学章、节或主题）：
第 3 章 工业机器人运动学
相关知识回顾
3.1 概述
3.2 物体在空间中的位姿描述</td></tr>
<tr><td>主要教学方法
与手段</td><td colspan="3">教学方法：启发式教学、实例引导法教学
教学手段：板书+多媒体</td></tr>
<tr><td colspan="4">本课次教学目的、要求（分掌握、熟悉、了解三个层次）：
1、掌握矩阵的一些基本理论；
2、掌握坐标系及方向矢量的概念，矢量的点积
3、了解工业机器人运动学研究的主要问题；
4、掌握物体在空间中的描述方法。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学重点及难点：
重点：矩阵的运算；方向矢量的概念及应用；姿态矩阵的概念及表示方法
难点：方向矢量的应用；物体在空间中姿态矩阵的理论推导过程。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教学基本内容及过程</td></tr>
</table>

相关知识回顾

一、 矩阵的基本概念

1、行列式的展开法则：行列式等于它的任意一行（或列）各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

2、行矩阵、列矩阵、矩阵相等及单位矩阵的概念。

3、矩阵的运算：

（1）矩阵的加法：两同型矩阵的对应元素相加。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

（2）矩阵与数相乘：该数与矩阵各元素相乘。

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

（4） 矩阵转置。

4、矩阵的逆，分块矩阵，正交矩阵的概念。

5、行列式和矩阵的区别：矩阵是按一定方式排成的数表；行列式是一个数。

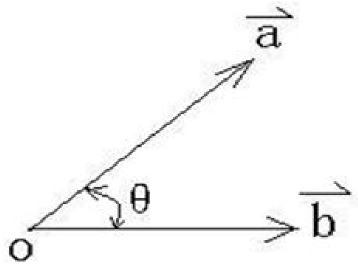
二、 坐标系

1.坐标系的分类：左手坐标系；右手坐标系；斜角坐标系。

2.右手坐标系：若按右手法则绕 oz 轴转 90^0 可以使 ox 轴转向 oy 轴，则称为右手坐标系。本课程使用的坐标系均为右手坐标系。

三、矢量的点积

1、矢量点积的基本理论



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

令 b=i （i 为 b 方向上的单位矢量），则

$$\vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\cos\theta$$

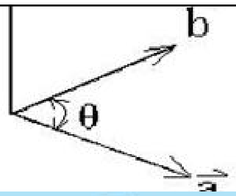
换句话说：一个矢量在另一个矢量上的投影等于该矢量与另一矢量方向上单位矢量的点积。

再令 a=j （j 为 a 方向上的单位矢量），则

$$\vec{j}\cdot\vec{i} = \cos\theta$$

即两矢量方向上单位矢量的点乘等于两矢量夹角的余弦。

2、矢量的叉积



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

其中 θ 是 a 和 b 间小于等于 180° 的夹角，若将 a 按右手法则绕 c 转 θ 角至 b，右手拇指指向为 c 的正方向，c 与 a、b 两者垂直。

3.1　概述

本书所讲的工业机器人采用的都是开链式结构，即机器人是由一系列关节连接起来的连杆所组成的。为了定量地确定和分析机器人手部在空间中的运动规律，需要一种合适的运动描述的数学方法。通常采用矩阵法来描述机器人的运动学问题，即把坐标系固定于每一个连杆的关节上，如果知道了这些坐标系之间的相互关系，手部在空间的位姿也就能够确定了。那么，如何来描述两个相邻坐标系之间的相互关系呢？回答是用具有较直观几何意义的齐次坐标变换来描述，建立运动学方程，从而解决机器人运动学问题。

一、 机器人运动学要研究的主要问题

1. 正向运动学问题-运动分析

已知各个关节和连杆的参数和运动变量，求解末端执行器（手部）的位姿。

2. 反向运动学问题-运动综合

在已知末端执行器（手部）要到达的目标位姿的情况下，如何求解各个关节的运动变量。

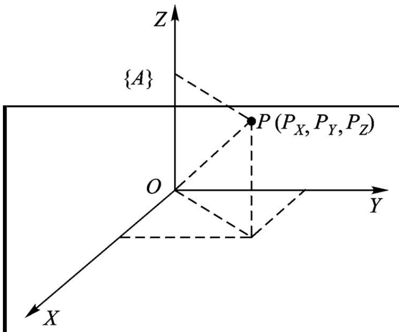
3.2　物体在空间中的位姿描述

1、点位置的描述

（1）直角坐标系中，空间任一点 P 的位置可用矢量描述。

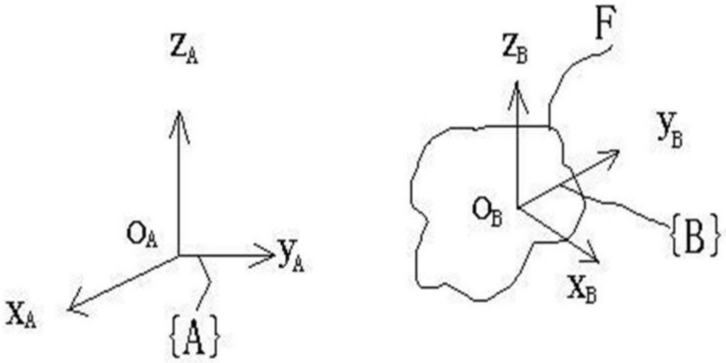
$$P = a_x\hat{i} + b_y\hat{j} + c_z\hat{k}$$

（2）在选定的直角坐标系{A}中，空间任一点 P 的位置也可用 3×1 的位置矢量 AP 表示，其左上角代表选定的坐标系



$$^{A}P=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix}$$

2、物体位置姿态（位姿）描述



（1）位置的描述

采用直角坐标描述点的位置，因此，刚体 F 的位置描述，即 OB 点在{A}中描述可用一个 3×1 的列矢量 （位置矢量）表示，即

$$^{A}\vec{P}_{BO}=[p_x,p_y,p_z]^T$$

其中 Px、Py 和 Pz 是点 OB 在{A}系中的三个坐标分量。

（2）姿态（方位）的描述

采用旋转矩阵来表示刚体姿态（方位） ，即由{B}系的三个单位主矢量相对于坐标系{A}的方向余弦组成：

$$^{A}_{B}R=\begin{bmatrix}\cos(x_B,x_A) & \cos(y_B,x_A) & \cos(z_B,x_A)\\ \cos(x_B,y_A) & \cos(y_B,y_A) & \cos(z_B,y_A)\\ \cos(x_B,z_A) & \cos(y_B,z_A) & \cos(z_B,z_A)\end{bmatrix}$$

R 为由方向余弦构成的 3×3 矩阵，表示坐标系{B}相对于坐标系{A}的姿态，称为姿态矩阵。

作业和思考题： 向量的点积和叉积的区别？ 怎么描述物体在三维空间中的位姿：
课后小结： 矩阵的基本运算：矩阵的加法，矩阵数乘，矩阵的乘法；向量的点积。 机器人运动学主要研究的问题：正向运动学问题；反向运动学问题。 物体在三维空间中的位姿描述：位置用建立在物体上的动坐标系坐标原点的空间坐标值表示；姿态用动坐标系相对于固定坐标系的三个坐标轴的方向余弦构成的姿态矩阵表示。

机器人学　讲义

授课时间	第　7　周　　　　第　7　节	课次	2
授课方式 （请打√）	理论课☑　讨论课□　实验课□　习题课□ 其他□	课时 安排	2

授课题目（教学章、节或主题）：

第 3 章 工业机器人运动学

3.3 齐次坐标与齐次坐标变换

主要教学方法 与手段	教学方法：启发式教学、实例引导法教学 教学手段：板书+多媒体

本课次教学目的、要求（分掌握、熟悉、了解三个层次）：

1、了解齐次坐标的概念；

2、掌握工业机器人齐次坐标变换和综合坐标变换。

教学重点及难点：

重点：齐次坐标变换方程；齐次坐标四个基本变换矩阵；综合坐标变换。

难点：齐次坐标变换方程与矩阵的推导；综合坐标变换中绝对变换与相对变换。

教学基本内容及过程

3.3　齐次坐标与齐次坐标变换

3.3.1 齐次坐标

1. 齐次坐标的概念与引入

齐次坐标是将一个原本是 n 维的向量用一个 n+1 维向量来表示。

（1）表示三维空间直角坐标系{A}中点 P，则列阵$[Px\ Py\ Pz\ 1]^T$称为三维空间点 P 的齐次坐标。

（2）若用齐次坐标来描述 X、Y、Z 轴的方向，则

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$

规定：

（1）若（4×1）列阵$[a\ b\ c\ w]^T$中第四个元素为零，且 $a^2+b^2+c^2=1$，则表示某轴（矢量）的方向，其中 a b c 是该轴的单位向量在各坐标轴上的分量。

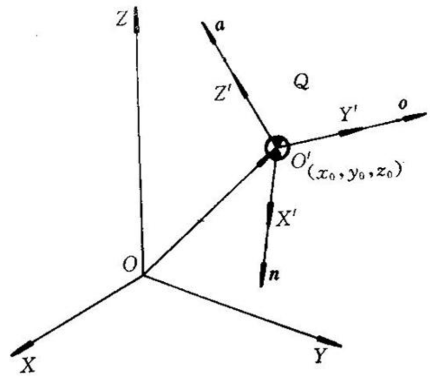
（2）若（4×1）列阵[a b c w]^{T}中第四个元素不为零，则表示空间某点的位置。如原点位置表示为 v＝[0 0 0 1]^T。

2、用齐次坐标表示物体在空间中的位姿

（1）固定坐标系和动坐标系的概念

在机器人坐标系中，当连杆运动时，位置和姿态固定不变的坐标系称为固定坐标系或静系；跟随连杆运动的坐标系称为动坐标系或简称动系。

（2）在物体上的任一点建立一个动坐标系，该动坐标系与物体固联在一起，则对物体位姿的描述就是对动坐标系原点位置的描述以及对动坐标系各坐标轴方向的描述。



令 n、o、a 分别为 X’ Y’ Z’坐标轴的单位方向矢量，则每个单位方向矢量在固定坐标系中各坐标轴上的分量为动坐标系各坐标轴的方向余弦，用齐次坐标形式的（4×1）列阵分别表示为： n＝[n_x n_y n_z 0]^T， o＝[o_x o_y o_z 0]^T， a＝[a_x a_y a_z 0]^T

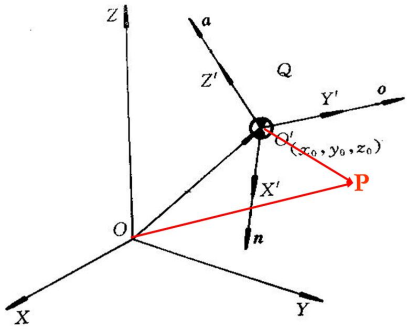
因此，图中动坐标系的位姿可用下面的（4×4）矩阵来描述：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n & o & a & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & x_0 \\ n_y & o_y & a_y & y_0 \\ n_z & o_z & a_z & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2 齐次坐标变换

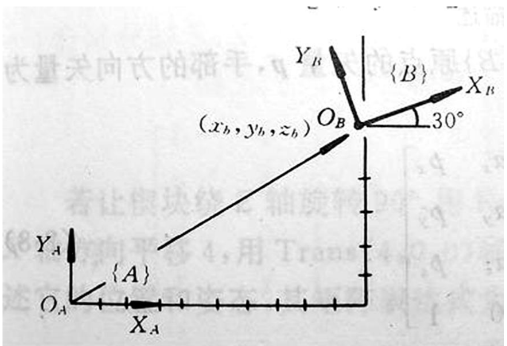
例题引入

假设机器人手部拿一个钻头在工件上实施钻孔作业，已知钻头中心 P 点相对于手部中心的位置，求 P 点相对于基座的位置。分别将基座和手部设置为固定坐标系和动坐标系，如下图所示。



由 $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ 三个向量之间的关系，经过计算整理可得 X＝TX$_b$，称为齐次坐标变换方程，其中 T=$\begin{bmatrix} R & X_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$称为齐次坐标变换矩阵，包含了两级坐标变换之间的位置平移和角度旋转两方面信息。

例 1 下图表示固联于刚体的坐标系{B}位于 OB 点，xb=10, yb=5, zb=0。ZB 轴与画面垂直，坐标轴{B}相对固定坐标系 {A}有一个 30°的偏转，试写出表示刚体位姿的坐标系{B}的（4×4）的矩阵表达式。



解：XB 的方向列阵：

n＝[cos30° cos60° cos90° 0]^T

＝[0.866 0.500 0.000 0]^T

YB 的方向列阵：

o=[cos120° cos30° cos90° 0]^T

＝[-0.500 0.866 0.000 0]^T

ZB 的方向列阵：

a＝[cos90° cos90° cos0° 0]^T

＝[0.000 0.000 1.000 0]^T

坐标系{B}的位置阵列：

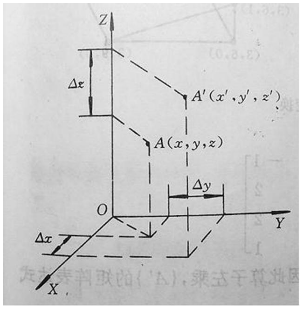
p＝[10.0 5.0 0.0 1]^T

坐标系{B}的位姿为：

$$B=\begin{bmatrix} n & o & a & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.3 齐次坐标变换举例

1、平移坐标变换



首先，介绍点在空间直角坐标系中的平移。如图所示，空间某一点 A，坐标为（x，y，z），当它平移至 A’点后，坐标为（x’，y’，z’），其中：

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$

$$z' = z + \Delta z$$

可用右面形式表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

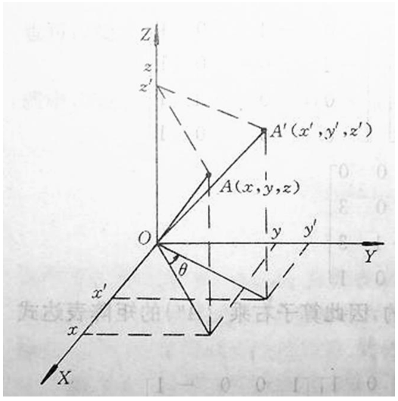
式中，Trans(Δx, Δy, Δz)表示经平移坐标变换后的齐次坐标变换矩阵

$$\mathrm{Trans}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2、旋转坐标变换

引入：介绍点在空间直角坐标系中的旋转。

如图所示，空间某一点 A，坐标为（x, y, z），当它绕 Z 轴旋转 θ 角后至 A’点，坐标为（x’，y’，z’），A’点和 A 点的坐标关系为



$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$z' = z$$

或用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

用齐次坐标表示 A 点绕 Z 轴的旋转变换过程为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

可用 Rot(Z, θ)来表示

$$\mathrm{Rot}(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中：Rot(z, θ)表示动坐标系绕 Z 轴旋转 θ 角后所得的变换矩阵。

同理得到动坐标系分别绕 X 轴、Y 轴旋转 θ 角后的变换矩阵

$$\mathrm{Rot}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta & 0\\ 0 & s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(y,\theta)=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3、广义旋转坐标变换（了解）

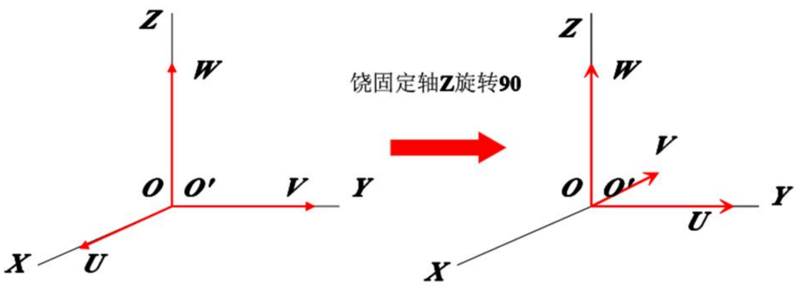
点在空间直角坐标系中绕过原点任意轴的一般旋转变换。

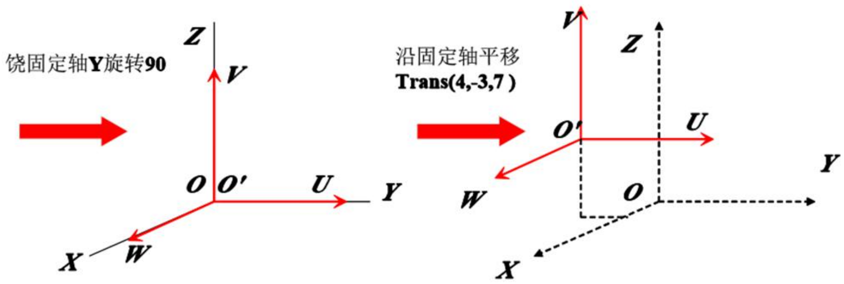
4、综合坐标变换

（1） 相对变换和绝对坐标变换的概念

（2） 以例题说明综合坐标变换的概念及解法

例 1， 活动坐标系 O,UVW 与固定参考坐标系 OXYZ 初始位置重合，经下列坐标变换：绕 Z 轴旋转 90°，再绕 Y 轴旋转 90°，最后相对于固定坐标系平移位置向量 4i-3j+7k，如图所示，求复合齐次变换矩阵 T。





解：

$$T_1 = \mathrm{Rot}(z,90)$$

$$T_2 = \mathrm{Rot}(y,90)$$

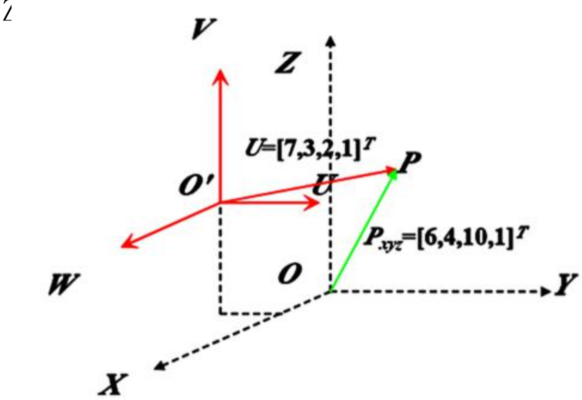
$$T_3 = \mathrm{Trans}(\ 4,-3,7)$$

复合齐次坐标变换矩阵 T 为

$$T = T_3\,T_2\,T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 2， 如果考虑固结于活动坐标系上的一点，假设为 U=7i+3j+2k，在任何时刻该向量在 O,UVW 坐标系的表达式是不变的，活动坐标系在经过上述例 1 的变换后，在固定坐标系 OXYZ

什么？



$$P_{xyz}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{T_3\text{平移}}\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{T_2T_1\text{旋转}}\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1&4\\1&0&0&-3\\0&1&0&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{T\text{复合}}\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\4\\10\\1\end{bmatrix}$$

例 3，假定活动坐标系上的点 P（7,3,2）^{T}相对于当前的动坐标系进行一系列变换，具体变换如下。求出变换完成后该点相对于固定坐标系的坐标

（1）绕 W 轴旋转 90°；

（2）然后沿 U、V、W 轴平移[4，-3，7]；

（3）最后，绕 V 轴旋转 90°

解：

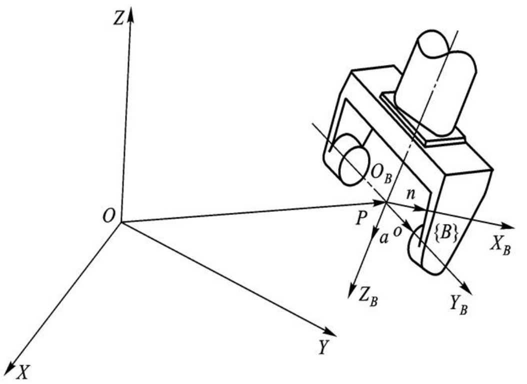
在本例中，因为变换相对于当前坐标系，因此右乘每个变换矩阵，可得表示该点坐标的方程为：

$$P_{xyz}=Rot(w,90)Trans(4,-3,7)Rot(v,90)P_{uvw}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&7\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\6\\0\\1\end{bmatrix}$$

结论：若每次的变换都是相对于固定坐标系进行的，则矩阵左乘；若每次的变换都是相对于动坐标系进行的，则矩阵右乘。

3.3.4 机器人手部位姿的表示



手部的位置矢量为固定参考系原点指向手部坐标系{B}原点的矢量 p，手部的方向矢量为 n、o、a。于是手部的位姿可用（4×4）矩阵表示为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} n & o & a & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
作业和思考题： P87　3-1;3-2;3-3 为什么要引入齐次坐标？
课后小结： 齐次坐标的概念； 齐次坐标变换方程的推导过程； 平移坐标变换矩阵，绕三个坐标轴的三个旋转坐标变换矩阵； 区分综合坐标变换时变换矩阵的左乘和右乘适用的条件。

机器人学 讲义

授课时间	第 8 周 第 8 节	课次	2
授课方式 （请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时 安排	2

授课题目（教学章、节或主题）：

第 3 章 工业机器人运动学

3.4 变换方程的建立

3.5 RPY 角与欧拉角

主要教学方法 与手段	教学方法：启发式教学、实例引导法教学 教学手段：板书+多媒体

本课次教学目的、要求（分掌握、熟悉、了解三个层次）：

1、了解机器人各种坐标系的定义及多种坐标系之间的变换

2、掌握多种坐标系之间的变换矩阵

3、了解 RPY 角和欧拉角的概念及应用

教学重点及难点：

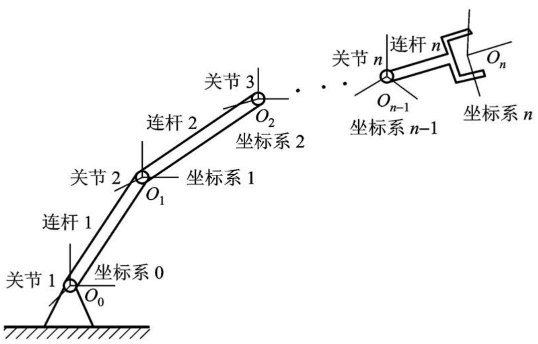
重点：机器人的多种坐标系定义，多种坐标系之间的关系及变换

难点：多种坐标系之间的关系及变换。

教学基本内容及过程

3.4 变换方程的建立

3.4.1、 多级坐标变换



1、从坐标系{On：x_n, y_n, z_n}到坐标系{O_0：x_0, y_0, z_0}经过了 n 级的逐次坐标变换，且每次都是相对于动坐标系进行的。

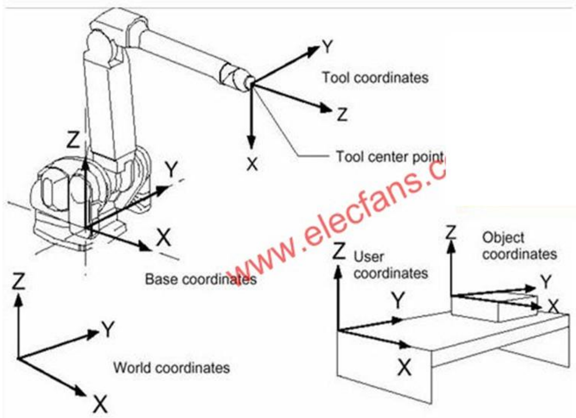
2、若求出任一个相邻两级之间的坐标变换矩阵 T_i，则坐标系{O_n：x_n, y_n, z_n}到坐标系{O_0：x_0, y_0, z_0}之间的坐标变换矩阵可表示为 $T=T_1T_2T_3T_4\cdots T_{n-1}T_n$

3、齐次坐标变换方程式为： $X= TX_n$

3.4.2、 **多种坐标系的变换**

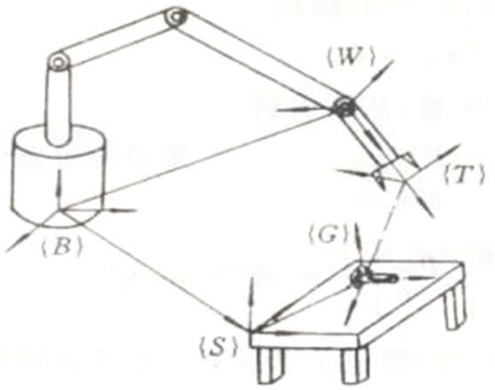
1、多种坐标系

规定坐标系的目的是为机器人规划和编程提供一种标准符号。



六种坐标系的名称：通用世界坐标系{U}；基（固定）坐标系{B},又表示为{0}；腕坐标系{W}；工具坐标系{T}；工作台（用户）坐标系{S}；目标（工件）坐标系{G}

2、多种坐标系之间的变换矩阵



工具坐标系{T}相对于基坐标系{B}的变换方程可表示为：

$$ {}^{B}_{T}T = {}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T $$

$$ {}^{B}_{T}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T\,{}^{G}_{T}T $$

可知，变换过程具有封闭性。

3.5 RPY 角和欧拉角

RPY 角和欧拉角的引入

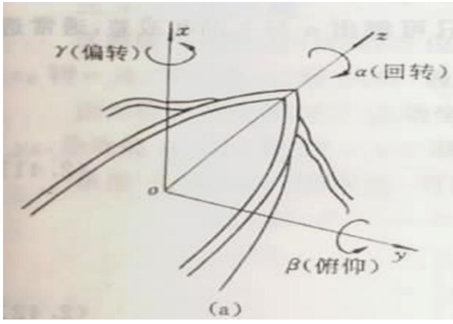
怎么简便的描述活动坐标系的方位？

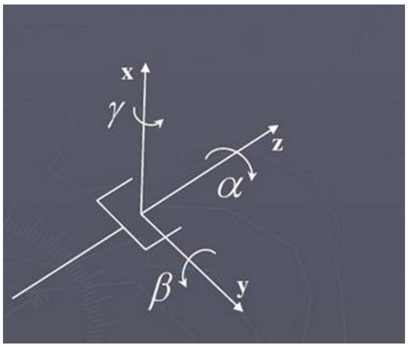
旋转矩阵 R 的九个因素中，只有三个是独立变量，计算起来比较方便，但却不能简洁明了的表示机械手的方位，因此引入 RPY 角和欧拉角来表示机械手在空间的

方位。

3.5.1、RPY 角（绕固定轴 x-y-z 旋转）--相对变换

1、RPY 角的定义





2、用 PPY 角描述活动坐标系方位的法则

动坐标系初始方位与固定坐标系重合，动坐标系绕固定坐标系的 X、Y、Z 轴依次进行旋转，各齐次变换矩阵按“从右向左”依次相乘原则进行运算（左乘）。

RPY（γ，β，α）=Rot（z, α）Rot（y, β）Rot（x, γ）

它表示绕固定坐标系的三个轴依次旋转得到的旋矩阵，因此称为绕固定轴 x-y-z 旋转的 RPY 角法

3.5.2、欧拉角（绕动坐标系 z-y-x 旋转）--绝对变换

动坐标系初始方位与固定坐标系重合，动坐标系绕其 Z 轴旋转α角，然后绕动 Y 轴旋转β 角，最后绕动 X 轴旋转γ 角。

Euler（α，β，γ）=Rot（z, α）Rot（y, β）Rot（x, γ）

三次转动均相对于动坐标系的某个轴进行的。这样的三次转动角称为欧拉角

作业和思考题：

机器人中为什么要定义多种坐标系？

为什么要引入 RPY 角和欧拉角？

课后小结：

机器人多种坐标系的定义及多种坐标系之间的变换矩阵；

RPY 角的定义及用 RPY 角描述动坐标系方位的法则；

欧拉角的定义及用欧拉角描述坐标系运动的法则。

机器人学 讲义

授课时间	第 9 周 第 9 节	课次	2
授课方式 （请打√）	理论课☑ 讨论课□ 实验课□ 习题课□ 其他□	课时 安排	2

授课题目（教学章、节或主题）：

第 3 章 工业机器人运动学

3.6 机器人连杆 D-H 参数及其坐标变换

3.7 建立机器人运动学方程实例

3.8 机器人逆运动学

主要教学方法 与手段	教学方法：启发式教学、实例引导法教学 教学手段：板书+多媒体

本课次教学目的、要求（分掌握、熟悉、了解三个层次）：

1、掌握工业机器人连杆 D-H 参数；连杆坐标系之间齐次变换矩阵；工业机器人运动学方程。

2、了解机器人逆运动学的特性及求解过程

教学重点及难点：

重点：工业机器人连杆参数；工业机器人运动学方程；

难点：工业机器人运动学方程。

教学基本内容及过程

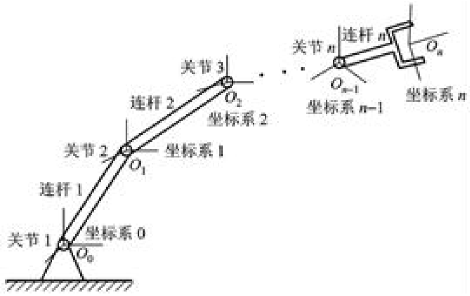
3.6 机器人连杆 D-H 参数及其坐标变换

3.6.1、 D-H 参数法

1、D-H 参数法的概念：

为关节链中的每一个杆件建立坐标系的矩阵方法称为 D-H 参数法

D-H 模型表示了对机器人连杆和关节进行建模的一种非常简单的方法，可用于任何机器人构型不管机器人的结构顺序和复杂程度如何；可用于表示已经讨论过的（直角坐标、圆柱坐标、欧拉角坐标等）在任何坐标中的变换。



2、机器人坐标系的分配

（1）顺序：按从机座到末端操作器的顺序，由低到高依次为各关节和各连杆编号。

（2）连杆编号：机座的编号为连杆 0，与机座相连的连杆编号为连杆 1，依此类推。

（3）坐标系分配：在每一个连杆上建立一个坐标系，该坐标系的 Z 轴与连杆末端关节的轴线重合。

3、连杆参数（如下图所示）

（1）连杆尺寸参数

连杆 i 两端有关节 i 和 i+1。该连杆尺寸可以用两个量来描述：

1）连杆长度 a_i ：两个关节轴线沿公垂线的距离（恒正）

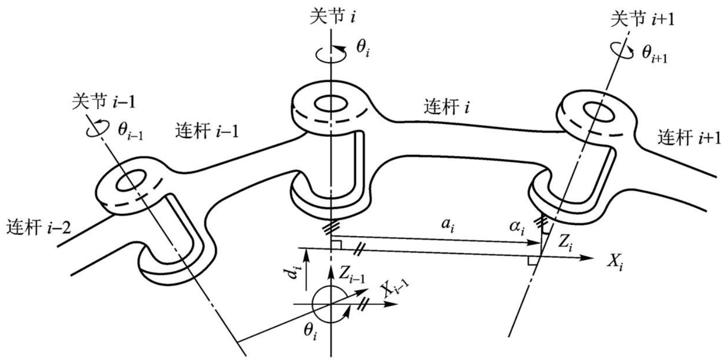
2）连杆扭角 α_i ：垂直于 a_i 的平面内两个轴线的夹角（有正负，方向 i 到 i+1）

（2）连杆关系参数

连杆 i-1 和连杆 i 通过关节 i 相连。其相对位置可以用两个参数来描述：

1） 连杆间距离 d_i：沿关节 i 轴线两个公垂线的距离

2） 连杆间转角 θ_i：垂直于关节 i 轴线的平面内两个公垂线的夹角



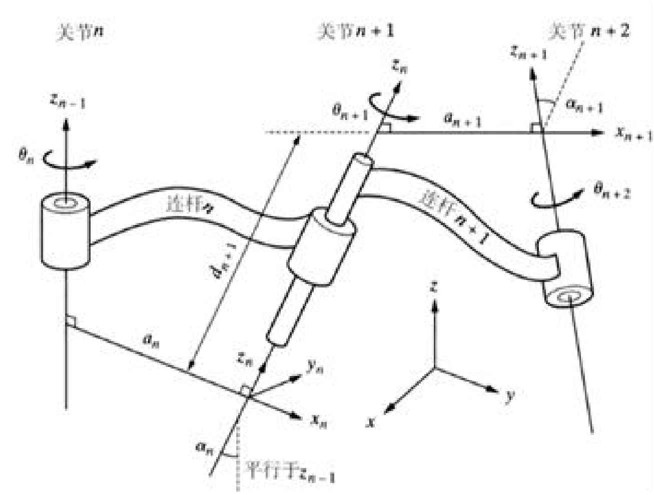
4、连杆坐标系（如下图所示）

连杆坐标系的建立按下面规则进行：

（1）坐标系{n}的 Z 轴与 n+1 关节轴共线，指向任意，即表示关节数 n+1 的 Z 轴是 Zn 。各连杆坐标系 Z 轴与关节轴线重合（对于移动关节，Z 轴线沿此关节移动方向）

（2）通常关节不一定平行或相交。Z 轴是斜线。定义坐标系{n}的 X 轴沿 Zn-1 轴和 Zn 轴之间的公垂线 an，指向是由关节 n 到关节 n+1 的方向

（3）坐标系{i-1}的 y 轴按照右手法则规定



3.6.2、 连杆坐标系之间的坐标变换

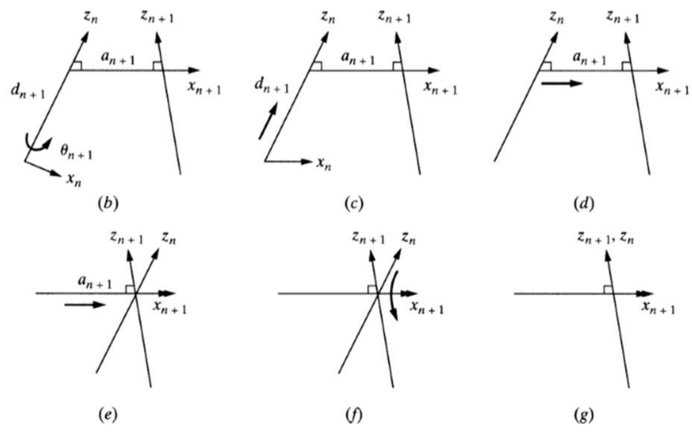
连杆坐标系之间的相对关系可以用坐标系之间的平移和旋转来表达。坐标系 n 经过以下四步变换可与坐标系 n+1 相重合：

（1） 绕 Zn 轴旋转θn+1 角，使 Xn 轴转到与 Xn+1 同一平面内。

（2） 沿 Zn 轴平移一距离 dn+1，把 Xn 移到与 Xn+1 同一直线上。

（3）沿 Xn+1 轴平移一距离 an+1，把连杆 n 的坐标系移动到使其原点与连杆 n+1 坐标系原点重合的地方（原点和 X 轴已重合）。

（4） 绕 Xn+1 旋转αn+1 角，使 Zn 转到与 Zn+1 同一直线上。



用一个变换矩阵 An 来综合表示上述四次变换，由于后一次变换都是相对动坐标系进行的，因此在运算中变换矩阵应该右乘。

可以用变换矩阵 An 来衡量两个坐标系之间的相对位姿。

对于一个确定的机器人，它是θn 或 dn 的函数。

$$^{n}T_{n+1}=A_{n+1}=Rot(z,\theta_{n+1})\times Tran(0,0,d_{n+1})\times Tran(a_{n+1},0,0)\times Rot(x,a_{n+1})$$

$$=\begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1} & 0 & 0 \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{n+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{n+1} & -S\alpha_{n+1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{n+1} & C\alpha_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{n+1}=\begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & S\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & a_{n+1}C\theta_{n+1} \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & -C\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & a_{n+1}S\theta_{n+1} \\ 0 & S\alpha_{n+1} & C\alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.7 建立机器人运动学方程实例

1、通常把描述一个连杆坐标系与下一个连杆坐标系间相对关系的齐次变换矩阵叫做 A 变换矩阵或 A 矩阵。

2、如果 A_1 矩阵表示第一个连杆坐标系相对于固定坐标系的位姿，A_2 矩阵表示第二个连杆坐标系相对于第一个连杆坐标系的位姿，那么第二个连杆坐标系在固定坐标系中的位姿可用 A_1 和 A_2 的乘积来表示。

$$T_2=A_1A_2$$

如此类推，对于六连杆机器人，有下列 T_6 矩阵：

$$T_6=A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

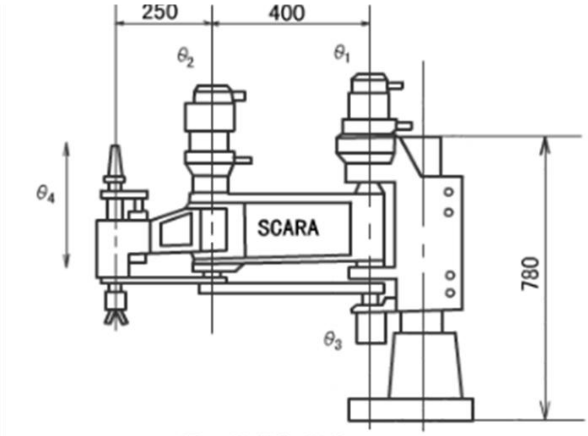
等式右边表示了从固定参考系到手部坐标系的各连杆坐标系之间的变换矩阵的连乘。结果为手部坐标系相对于固定参考系的位姿。称该式为机器人运动学方程。该式的计算结果 T_6 是一个如下的（4×4）矩阵：

$$\boldsymbol{T}_6=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4、正向运动学主要解决机器人运动学方程的建立及手部位姿的求解问题。结合实例介绍建立运动学方程的方法。

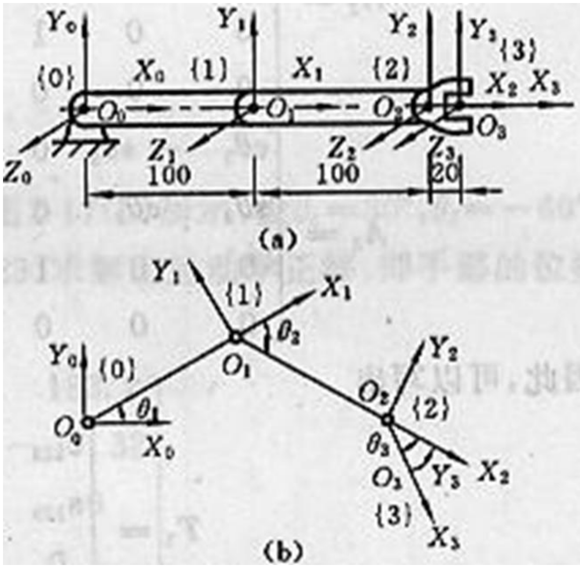
例、求平面关节型机器人的运动学方程

解：下图所示为具有一个肩关节、一个肘关节和一个腕关节的 SCARA 机器人。此机器人的机械结构特点是三个关节轴线是相互平行的。



平面关节机器人

（1）画出该机器人的简图，用 D-H 参数法建立坐标系，并确定 4 个 D-H 参数



固定坐标系{0}和连杆 1、连杆 2、连杆 3 的坐标系{1}、{2}、{3}分别如图所示，坐落在关节 1、关节 2、关节 3 和手部中心、各连杆参数为：

连杆	转角（变量）θ	两连杆间距离 d	连杆长度 a	连杆扭角 α
1	θ_1	0	100	0
2	θ_2	0	100	0
3	θ_3	0	20	0

2、该机器人的运动学方程为 T3=A1A2A3

$$A_1 = \mathrm{Rot}(z_0, \theta_1)\mathrm{Trans}(l_1, 0, 0)$$
$$A_2 = \mathrm{Rot}(z_1, \theta_2)\mathrm{Trans}(l_2, 0, 0)$$
$$A_3 = \mathrm{Rot}(z_2, \theta_2)\mathrm{Trans}(l_3, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{T}_3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_3 c_{123} + l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_3 s_{123} + l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4、T3 表示手部坐标系{3}(即手部）的位置和姿态。

$$T_3 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是可写出位置（4×1）列阵为

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_{123} + l_2 c_{12} + l_1 c_1 \\ l_3 s_{123} + l_2 s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当转角变量θ1、θ2 、 θ3 、给定时，可以算出具体的数值。

设θ1＝30° θ2＝－60° θ3＝－30° ，则可根据平面关节型机器人运动学方程式求解出运动学正解，即手部的位姿矩阵表达式为

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 183.2 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & -17.32 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.8　机器人逆运动学

1、逆运动学的概念：给定末端连杆的位姿，计算相应关节变量的过程叫做运动学逆解。

2、在已知手部要到达的目标位姿的情况下如何求出关节变量，以驱动各关节的电动机旋转，使手部的位姿得到满足，这就是机器人反向运动学问题，也称为求

运动学逆解。
3、机器人逆运动学的求解有多种方法。但其解可能不存在、具有多重性。
例如当机器人的关节数不足 6 个时，无论怎样确定各关节的变量，都会存在有不能实现的位置和姿态。
另外，在关节数为 6 个的情况下，也存在着求不出数值解的情况（超出解空间）。
反之，当关节数为 7 个以上时，实现给定的位置和方向的各关节的变量不能唯一确定（在解空间内）。
5、结论
（1）反解的可能解有多个，但由于结构限制，例如各关节变量不能在全部 360°范围内运动，有些解甚至全部解都不能实现。
（2）机器人存在多种解时，应选取其中最满意的一组解，譬如满足行程最短，功率最省，受力最好，回避障碍等要求。（实际上就是加约束条件）。

作业和思考题：
P88　3-7
什么是机器人逆解的多重性？

课后小结：
D-H 参数法连杆坐标系的建立，连杆参数和相邻连杆之间的参数，连杆坐标系之间的坐标变换矩阵；
建立机器人运动学方程的步骤
机器人逆运动学的特性。