

# 机器人学 讲义

授课时间	第 10 周                      第 10 节	课次	2
授课方式 (请打√)	理论课 <input checked="" type="checkbox"/> 讨论课 <input type="checkbox"/> 实验课 <input type="checkbox"/> 习题课 <input type="checkbox"/> 其他 <input type="checkbox"/>	课时 安排	2
授课题目(教学章、节或主题): <b>第 4 章 工业机器人静力计算及动力学分析</b> <b>4.1 速度雅可比矩阵与速度分析</b> <b>4.2 力雅可比矩阵与静力计算</b>			
主要教学方法 与手段	教学方法: 启发式教学、实例引导法教学 教学手段: 板书+多媒体		
本课次教学目的、要求(分掌握、熟悉、了解三个层次): 1、掌握工业机器人速度雅可比与速度分析 2、掌握工业机器人力雅可比与静力计算			
教学重点及难点: 重点: 工业机器人力雅可比与静力计算 难点: 工业机器人速度雅可比与速度分析			
教学基本内容及过程			
<b>4.1 速度雅可比矩阵与速度分析</b>			
机器人雅可比矩阵揭示了操作空间与关节空间的映射关系。同时它也可以表示两者之间力的传递关系,为确定机器人的静态关节力矩及不同坐标系间的速度、加速度和静力的变换提供了便捷的方法。			
<b>4.1.1、 机器人速度雅可比矩阵</b>			
1、雅可比矩阵的引入			
数学上雅可比矩阵(Jacobian Matrix)是一个多元函数的偏导矩阵。设有六个数学函数,每个函数有六个变量,即			
$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ \vdots \\ y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{cases}$			
将其微分得			

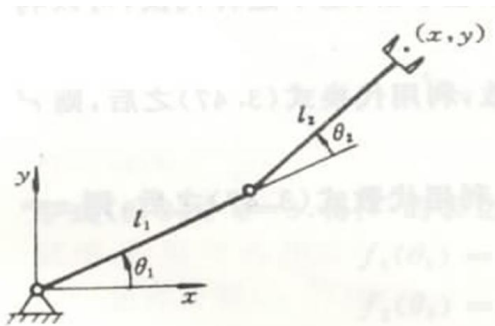
$$\begin{cases} \frac{\partial f_6}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} dx_6 \\ \vdots \\ dy_6 = \frac{\partial f_6}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} dx_6 \end{cases}$$

简记为

$$dY = \frac{\partial F}{\partial X} dx, \text{ 式中 } \frac{\partial F}{\partial X} \text{ 为雅可比矩阵。}$$

## 2、机器人速度雅可比矩阵

以 2 自由度平面关节型机器人为例说明并引入机器人速度雅可比矩阵。



通过手部端点位置  $x$ ,  $y$  与旋转关节变量  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  之间的关系求得关节速度与手部速度之间的关系。

$$\begin{cases} x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{cases}$$

将其微分并写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

J 为上图 2 自由度机器人的雅可比矩阵，它反映了关节空间微小运动与手部操作空间微小位移之间的关系。

#### 4.1.2 机器人速度分析

对  $dx=Jdq$  两边同除以  $dt$ ，得

$$\frac{dX}{dt} = J(q) \frac{dq}{dt}$$

$$V = J(q)\dot{q}$$

式中： $V$  为机器人末端在操作空间中的广义速度， $V = \dot{X}$ ； $\dot{q}$  为机器人关节在关节空间中的关节速度；

$J(q)$  为确定关节空间速度  $\dot{q}$  与操作空间速度  $V$  之间关系的雅可比矩阵。

对于  $n$  自由度机器人，关节空间速度向操作空间速度映射的线性关系称为雅可比矩阵，记为  $J$ ，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad J = \frac{\partial P}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_z}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

只要知道机械手的雅可比  $J$  是满秩的方阵，相应的关节速度即可求出，即

$$\dot{q} = J^{-1}V$$

$J^{-1}$  称为机器人的逆速度雅可比矩阵

#### 4.1.3 机器人雅可比矩阵讨论

我们希望工业机器人手部在空间按规定的速度进行作业，那么可以计算出沿路径上每一瞬时相应的关节速度。但是，一般来说，求逆速度雅可比  $J^{-1}$  是比较困难的，有时还会出现奇异解，就无法解算关节速度。

当机器人处在奇异形位时，就会产生退化现象，丧失一个或更多的自由度。这意味着在空间某个方向(或子域)上，不管机器人关节速度怎样选择，手部也不可能实现移动。机器人奇异形位分为以下两类：

(1) 工作域边界上奇异。当机器人臂全部伸展开或全部折回而使手部处于机器人工作域的边界上或边界附近时，出现逆雅可比奇异，这时机器人相应的形位叫做奇异形位。

(2) 工作域内部奇异。奇异并不一定发生在工作域边界上，也可以是由两个或更多个关节轴线重合所引起的。

## 4.2 力雅可比矩阵与静力计算

### 课程引入：提出问题

机器人与外界接触会有力和力矩的作用，如灵巧手抓取鸡蛋时；双足机器人上下楼梯时。那么机器人各关节的驱动力（广义力）与末端的作用力之间的关系？

#### 4.2.1 操作臂中的静力和力矩的平衡

本节讨论操作臂在静止状态下力的平衡关系。我们假定各关节“锁住”，机器人成为一个机构。这种“锁定用”的关节力矩与手部所支持的载荷或受到外界环境作用的力取得静力平衡。求解这种“锁定用”的关节力矩，或求解在已知驱动力矩作用下手部的输出力就是对机器人操作臂的静力计算。

#### 4.2.2 机器人力雅可比矩阵

机器人与外界环境相互作用时，在接触的地方要产生力和力矩，统称为末端广义（操作）力矢量。记为

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

n 个关节的驱动力（或力矩）组成的 n 维矢量，称为关节力矢量。

$$\vec{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$$

利用虚功原理，令各关节的虚位移为  $\delta q_i$ ，末端执行器相应的虚位移为  $D$ 。根据虚位移原理，各关节所作的虚功之和与末端执行器所作的虚功应该相等，即

$$\vec{\tau} \delta_{\vec{q}} = \tau_1 \delta_{q_1} + \tau_2 \delta_{q_2} + \dots + \tau_n \delta_{q_n} = \vec{F}^T \vec{D} = \vec{f}^T \vec{d} + \vec{n}^T \vec{\delta}$$

经计算可得

$$\vec{\tau} = J^T(\vec{q}) \vec{F}$$

式中  $J^T(\vec{q})$  称为机械手的力雅可比。它表示在静态平衡状态下，操作力向关节力映射的线性关系。

#### 4.2.3 机器人静力计算

机器人操作臂静力的计算问题可分为两类。

1、已知外界环境对机器人手部的作用力  $F'$  , 利用  $\tau = J^T(q)F$  求相应的满足静力平衡条件的关节驱动力矩  $\tau$

2、已知关节驱动力矩  $\tau$  , 确定机器人手部对外界环境的作用力  $F$  或负载。第二类问题是第一类问题的逆解。

#### 4.2.4、工业机器人静力学基础理论总结

机器人三大矩阵

1、齐次坐标变换矩阵  $T$ : 反映了两个空间位置之间的映射关系, 映射关系式为  $X = TX_b$

2、速度雅可比矩阵  $J$ : 两个空间速度之间的映射关系, 映射关系式为  $\dot{X} = J \dot{q}$

3、力雅可比矩阵  $J^T$ : 两个空间受力之间的映射关系, 映射关系式为  $\tau = J^T(q)F$

作业和思考题:

P107 4-1;4-7

机器人动力学主要研究和解决什么问题?

课后小结:

机器人速度雅可比矩阵和速度分析;

机器人力雅可比矩阵及静力计算;

# 机器人学 讲义

授课时间	第 11 周                      第 11 节	课次	2
授课方式 (请打√)	理论课 <input checked="" type="checkbox"/> 讨论课 <input type="checkbox"/> 实验课 <input type="checkbox"/> 习题课 <input type="checkbox"/> 其他 <input type="checkbox"/>	课时 安排	2
授课题目（教学章、节或主题）： <b>第 4 章 工业机器人静力计算及动力学分析</b> <b>4.3 工业机器人动力学分析</b> <b>4.4 机器人动力学建模和仿真</b>			
主要教学方法 与手段	教学方法：启发式教学、实例引导法教学 教学手段：板书+多媒体		
本课次教学目的、要求（分掌握、熟悉、了解三个层次）： 1、掌握工业机器人动力学主要研究的内容和解决的问题 2、了解工业机器人动力学分析所需的基本理论及分析过程。 3、了解工业机器人动力学建模需要注意的问题及仿真的步骤			
教学重点及难点： 重点：工业机器人动力学分析 难点：工业机器人动力学分析			
教学基本内容及过程			
<b>4.3 工业机器人动力学分析</b>			
一、研究内容 1、为了对机器人进行控制、优化设计和仿真，需要研究机器人受力和运动之间的关系。 2、机器人动力学问题主要解决动力学正问题和逆问题：动力学正问题：根据各关节的驱动力（或力矩），求解机器人的运动，主要用于机器人的仿真；动力学逆问题：已知机器人的运动参数，求解所需要的关节力（或力矩），主要用于机器人的实时控制。			
二、分析方法 1、分析研究机器人动力学特性的方法很多，有拉格朗日(Lagrange)方法，牛顿—欧拉(Newton—Euler)方法，高斯(Gauss)方法，凯恩(Kane)方法等。 2、拉格朗日方法不仅能以最简单的形式求得非常复杂的系统动力学方程，而且具有显式结构，物理意义比较明确，对理解机器人动力学比较方便。			
<b>4.3.1、 拉格朗日方程</b>			

## 1、拉格朗日函数

拉格朗日函数  $L$  的定义是一个机械系统的动能  $E_k$  和势能  $E_p$  之差, 即  $L = L_k - E_p$ 。令  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$  是使系统具有完全确定位置的广义关节变量,  $\dot{q}$  是相应的广义关节速度。

## 2、拉格朗日方程

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

式中:  $F_i$  称为关节广义驱动力。如果是移动关节, 则  $F_i$  为驱动力; 如果是转动关节, 则  $F_i$  为驱动力矩。

### 4.3.2 平面关节机器人动力学分析

用拉格朗日法建立机器人动力学方程的步骤

- (1) 选取坐标系, 选定完全而且独立的广义关节变量  $q_i, i=1, 2, \dots, n$ 。
- (2) 选定相应的关节上的广义力  $F_i$ , 当  $q_i$  是位移变量时, 则  $F_i$  为力; 当  $q_i$  是角度变量时, 则  $F_i$  为力矩。
- (3) 求出机器人各构件的动能和势能, 构造拉格朗日函数。
- (4) 代入拉格朗日方程求得机器人系统的动力学方程。

### 4.3.3 关节空间和操作空间动力学

关节空间和操作空间的概念:  $n$  个自由度机器人中,  $n$  维关节矢量  $q$  构成关节空间; 机器人末端操作器的位姿是在直角坐标空间中描述的, 称这个空间为操作空间。

#### 1、关节空间动力学

在关节空间中描述关节力矩与关节变量、速度、加速度之间的关系。

#### 2、操作空间动力学

在操作空间中用末端操作器位姿的矢量  $X$  表示机器人动力学方程。

## 4.4 机器人动力学建模和仿真

以论文为例进行说明机器人动力学建模和仿真过程

### 1、工业机器人动力学建模及联合仿真

主要研究内容

以 HT001 型 6 自由度工业机器人为研究对象, 用 SolidWorks 建立机器人三维模型, 采用牛顿-欧拉法对研究对象的动力学模型进行推导, 利用 Matlab 进行理论计算, 并用 Adams 仿真软件对动力学理论分析结果进行验证。

用这三个软件建立机械臂仿真, 既可以对机械臂运动学及动力学进行仿真分析,

又可以有效地提高机械臂的性能，为实际物理样机的结构设计和控制研究提供技术依据

## 2、工业机器人动力学仿真及有限元分析

主要研究内容

以一台六自由度弧焊机器人作为研究对象，对其运动学和动力学进行了系统的研究，同时对机器人的关键部件进行了有限元分析。

本文的主要内容如下：

### 第一章

弧焊机器人研发的背景和意义，阐述了目前机器人刚体动力学的研究特点、柔性机器人动力学研究现状与发展以及有限元分析方法在机器人中的应用。

### 第二章

应用 D-H 方法，建立了机器人的连杆坐标系，推导机器人的运动学方程，针对运动学逆问题的求解，编制逆解求解程序，程序中提取了最优逆解，保证了逆解的唯一性，同时求解了机器人的雅可比矩阵，为末端执行器的运动分析提供了基础。

### 第三章

完成机器人的静力学分析，采用牛顿-欧拉算法编制了机器人动力学的 MATLAB 计算程序，为机器人的动力学仿真奠定了基础。

### 第四章

利用 Robotic Toolbox 实现了机器人的运动学图形仿真，对第二章推导的运动学正反解方程进行了验证，结果证明推导的机器人运动学正问题和运动学逆问题的正确性；采用关节空间的轨迹规划方法，在 MATLAB/SIMULINK 平台下，建立了基于关节空间轨迹规划的动力学仿真模型，通过仿真得到了各关节的驱动力矩特性曲线，为机器人的设计和电机的选择提供了参考。

### 第五章

用有限元分析软件 ANSYS，对机器人的关键承载部件，进行了静力学分析和模态分析，得到了各部件的局部刚度、变形、应力分布及振动频率情况，为结构设计及优化奠定了基础。

### 第六章

对全文进行总结，对当前机器人动力学研究的不足进行了分析，提出了机器人的刚柔耦合动力学仿真方案，并对建立集机器人运动学仿真、动力学仿真，结构设



计及优化于一体的综合结构优化平台做出了展望。

作业和思考题？

二自由度平面关节机械手动力学方程主要包含哪些项？它们各有何物理意义？

为什么要对机器人动力学建模和仿真？

课后小结：

平面关节机器人动力学方程的推导过程；

动力学方程中各参数代表的含义及简化条件；

关节空间和操作空间动力学的概念；

机器人动力学建模需要注意的问题及仿真步骤。